Популярные лекции
ПО МАТЕМАТИКЕ

А. С. СМОГОРЖЕВСКИЙ

О ГЕОМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО

*

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА • 1957

ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВЫПУСК 23

А. С. СМОГОРЖЕВСКИЙ

О ГЕОМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1957

11-2-1

АННОТАЦИЯ

Цель книги состоит в том, чтобы ознакомить читателя с основными положениями неевклидовой геометрии Лобачевского. Автор дает в книге краткий очерк жизни и деятельности Н. И. Лобачевского и останавливается на вопросе о происхождении аксиом и их роли в геометрии.

Для понимания книги необходимо знание элементарной геометрии (в ее планиметрической части) и тригонометрии в объеме курса средней школы. Кроме того, автор пользуется инверсией — специальным геометрическим преобразованием, основные свойства которого выясняются в одном из первых параграфов книги.

Автор является крупным специалистом по геометрии Лобачевского, и его книга представляет интерес не только для школьников — любителей математики, но и для студентов младших курсов педагогических институтов и университетов.

Смогоржевский Александр Степанович

Редактор *В. А. Солодков*
Техн. редактор *Е. А. Ермакова* Корректор *М. М. Шульженко*

Сдано в набор 11/VII 1957 г. Подписано к печати 12/IX 1957 г. Бумага 84×108¹/₃₂. Физ. печ. л. 2,13. Условн. печ. л. 3,48. Уч.-изд. л. 3,25. Тираж 20 000 экз. Т-08398. Цена книги 1 р. Заказ № 2242.

Государственное издательство технико-теоретической литературы, Москва, В-71, Б. Калужская ул., 15

Типография № 2 им. Евг. Соколовой УПП Ленсовнархоза. Ленинград, Измайловский пр., 29.

ОГЛАВЛЕНИЕ

От автора 4
§ 1. Краткий очерк жизни и деятельности Н. И. Лобачевского 5
§ 2. О происхождении аксиом и их роли в геометрии 8
§ 3. Инверсия 19
§ 4. Карта плоскости Лобачевского 27
§ 5. Окружность в плоскости Лобачевского 39
§ 6. Эквидистанта 43
§ 7. Предельная линия 44
§ 8. Некоторые теоремы геометрии Лобачевского 45
§ 9. Дополнительные замечания 49
§ 10. О натуральных логарифмах и гиперболических функциях 50
§ 11. Измерение отрезков гиперболических прямых 55
§ 12. Основные формулы гиперболической тригонометрии . . . 57
§ 13. Длины некоторых плоских кривых геометрии Лобачевского 62
Заключение 66

ОТ АВТОРА

Цель настоящей книжки — ознакомить читателя с основными положениями неевклидовой геометрии Лобачевского.

Знаменитый русский ученый Н. И. Лобачевский был выдающимся мыслителем. Ему принадлежит одно из величайших математических открытий — построение своеобразной геометрической системы, отличной от геометрии Евклида. Краткие биографические сведения о Н. И. Лобачевском читатель найдет в § 1 нашей книжки.

Геометрии Евклида и Лобачевского имеют много общего; различны в них лишь определения, теоремы и формулы, связанные с аксиомой параллельности. Чтобы уяснить себе, чем вызвано это различие, следует рассмотреть, как возникли и развивались основные геометрические понятия. Этому вопросу посвящен у нас § 2.

Для понимания книжки, кроме знания геометрии (в ее планиметрической части) и тригонометрии в объеме курса средней школы, необходимо знакомство с преобразованием, называемым инверсией. В § 3 мы даем обзор наиболее важных его свойств. Надеемся, что читатель без большого труда и с пользой для себя овладеет содержанием этого параграфа, который, как и § 10, играет в нашей книжке хотя и вспомогательную, но весьма важную роль.

§ 1. КРАТКИЙ ОЧЕРК ЖИЗНИ И ДЕЯТЕЛЬНОСТИ Н. И. ЛОБАЧЕВСКОГО

Николай Иванович Лобачевский родился 20 ноября (по новому стилю — 1 декабря) 1792 года в семье бедного чиновника. Николай Лобачевский и два его брата рано остались на попечении матери, женщины энергичной и разумной. Несмотря на крайнюю скудость средств, она определила всех своих сыновей в Казанскую гимназию.

Н. И. Лобачевский учился в Казанской гимназии с 1802 по 1807 год, в Казанском университете — с 1807 по 1811 год. Обладая блестящими математическими способностями, Лобачевский успешно прошел курс обучения и после окончания университета был оставлен при нем для подготовки к профессорскому званию, в котором и был утвержден в 1816 году.

Педагогическая деятельность Лобачевского оставила яркий след в памяти его учеников. Его лекции отличались отчетливостью и полнотой изложения. Познания Лобачевского в различных областях науки были обширными и разносторонними, что позволяло ему брать на себя чтение лекций не только по предметам математического цикла, но и по механике, физике, астрономии, геодезии, топографии.

Избранный в 1827 году ректором Казанского университета, Лобачевский состоял в этой должности почти двадцать лет. Талантливый и энергичный администратор, хорошо понимавший задачи высшего образования, он сумел превратить Казанский университет в образцовое высшее учебное заведение того времени. По его почину университет приступил к изданию «Ученых записок». При Лобачевском широко развернулось строительство университетских зданий и была открыта астрономическая обсерватория университета.

Всемирную славу принесла Лобачевскому его научная деятельность. Он обессмертил свое имя созданием неевклидовой

геометрии, которую в настоящее время по имени ее основоположника называют геометрией Лобачевского [1]).

11 (23) февраля 1826 года на заседании Отделения физико-математических наук Казанского университета Лобачевский выступил с докладом, в котором впервые сообщил о сделанном им открытии неевклидовой геометрии. Первым изложением ее основ, появившимся в печати, был мемуар Лобачевского «О началах геометрии», опубликованный в 1829—1830 годах в журнале «Казанский вестник».

Открытие Лобачевского не было понято большинством его современников; его геометрические труды получили отрицательные отзывы как в России, так и за границей. Идеи великого русского ученого были слишком смелыми и резко расходились с господствовавшими тогда в науке воззрениями; поэтому протекло немало времени, пока они завоевали общее признание, пришедшее лишь после смерти Лобачевского.

Лобачевский не был разубежден нападками критики в правильности своих выводов и с присущей ему энергией и настойчивостью продолжал заниматься разработкой созданной им геометрической системы. Он публикует ряд работ, посвященных вопросам неевклидовой геометрии. Последняя из них, законченная Лобачевским незадолго до смерти, была записана под его диктовку; сам он уже не мог писать из-за поразившей его в старости слепоты.

Научная деятельность Лобачевского не ограничивалась геометрическими исследованиями: ему принадлежит также несколько фундаментальных трудов в области алгебры и математического анализа. Весьма остроумен и практичен найденный Лобачевским метод приближенного решения алгебраических уравнений.

Философские воззрения Лобачевского имели ярко выраженную материалистическую направленность. Лобачевский считал, что наиболее надежным средством проверки теоретических выводов является опыт, практика. Он требовал такого преподавания математики, которое приучало бы видеть за математическими действиями реальные явления жизни.

В 1846 году Лобачевский был отстранен от работы в университете и назначен помощником попечителя Казанского учебного округа. Хотя формально это было повыше-

---

[1]) Другое ее название — *гиперболическая геометрия* — связано с тем, что в ней прямая линия, как и гипербола евклидовой геометрии, имеет две бесконечно удаленные точки (см. § 4).

нием по службе, но фактически таким путем высшее начальство постаралось избавиться от прогрессивно настроенного и потому неугодного ему ректора; на новом посту, подчиненный попечителю учебного округа, Лобачевский был намного больше стеснен в своих действиях, чем в бытность ректором университета. Лобачевский тяжело переживал уход из университета, с которым была связана вся его жизнь.

Скончался Лобачевский 12 (24) февраля 1856 года. В 1896 году в Казани против здания университета был сооружен памятник этому выдающемуся ученому [1]).

---

[1]) Более полные биографические сведения о Лобачевском читатель может найти в следующих книгах:

В. Ф. Каган, Лобачевский, М. — Л., 1948. Этот обширный труд (506 страниц текста), кроме обстоятельно написанной биографии Лобачевского, содержит также обзор его произведений.

В. Ф. Каган, Великий ученый Н. И. Лобачевский и его место

§ 2. О ПРОИСХОЖДЕНИИ АКСИОМ И ИХ РОЛИ В ГЕОМЕТРИИ

Для выяснения роли аксиом рассмотрим в общих чертах наиболее важные этапы развития геометрии с древнейших времен.

Родиной геометрии являются страны Древнего Востока, где несколько тысячелетий тому назад в связи с потребностями землемерия, архитектуры и астрономии были выработаны важные в практическом отношении правила измерения углов, площадей некоторых фигур и объемов простейших тел. Эти правила вырабатывались эмпирически (опытным путем) и, по-видимому, передавались устно: в древнейших дошедших до нас математических текстах мы нередко встречаем применения геометрических правил, но не находим попыток формулировать их.

С течением времени, когда расширился круг объектов, к которым прилагались приобретенные геометрические знания, выяснилась необходимость формулирования геометрических правил, и притом в наиболее общем виде, что обусловило переход в геометрии от конкретных понятий к абстрактным. Например, правило, выработанное для измерения площади прямоугольного земельного участка, оказалось пригодным для измерения площади ковра, поверхности стены и т. п., в результате чего возникло абстрактное понятие — прямоугольник.

Так сложилась система знаний, получившая название геометрии. На первой стадии своего развития геометрия была эмпирической наукой, т. е. такой, все результаты которой выводятся непосредственно из опыта.

Развитие геометрии пошло по новому пути, когда было подмечено, что некоторые ее предложения не нуждаются в эмпирическом обосновании, поскольку они могут быть выведены из других ее предложений посредством умозаключений, построенных по законам логики. В геометрии

в мировой науке, М. — Л., 1943. Небольшая популярно написанная книжка.

П. А. Широков, В. Ф. Каган, Строение неевклидовой геометрии. Выпуск 1 серии «Геометрия Лобачевского и развитие ее идей», М. — Л., 1950. В одном из разделов этой книги дано краткое, хорошо выполненное изложение начал геометрии Лобачевского, доступное широкому кругу читателей.

См. также статью «Лобачевский» в 25 томе Большой Советской Энциклопедии (2-е издание, стр. 314—317).

начали различать предложения двух родов: установленные опытным путем (позднее они были названы аксиомами) и доказуемые логически на основе аксиом (теоремы).

Так как логическое обоснование, не требующее ни специальных приборов, ни многочисленных утомительных измерений, в техническом отношении значительно проще эмпирического, то перед учеными античного мира встала, естественно, задача свести к минимуму количество предложений первого рода (аксиом), чтобы тем самым облегчить работу геометра, перенеся основную ее тяжесть в сферу логического мышления. Эта цель оказалась достижимой, так как геометрия абстрагируется от всех свойств тел, за исключением протяженности, — свойства весьма существенного, но настолько простого, что всевозможные геометрические соотношения могут быть выведены по законам логики из ограниченного количества предпосылок — аксиом.

Так геометрия из науки эмпирической превратилась в дедуктивную науку с характерным для ее современного состояния аксиоматическим изложением [1]).

Первым дошедшим до нас систематическим изложением основных положений геометрии были «Начала» Евклида, написанные около 300 года до нашей эры. Этот труд построен по следующей схеме: после определений и аксиом приводятся доказательства теорем и решения задач, причем каждая новая теорема доказывается на основе аксиом и ранее доказанных теорем. Аксиомы не доказываются, а только формулируются.

В течение двух тысячелетий «Начала» Евклида пользовались в ученом мире непререкаемым авторитетом. Однако одно место этого труда казалось не вполне оправданным. Мы имеем в виду аксиому параллельности, которую Евклид сформулировал так:

Если две прямые при пересечении с третьей прямой образуют внутренние односторонние углы, сумма которых меньше двух прямых углов, то эти две прямые, продолженные неограниченно, встретятся с той стороны, где эта сумма меньше двух прямых углов [2]).

---

[1]) Дедукция — вывод. Дедуктивной называется такая наука, в которой новые положения выводятся чисто логическим путем из предшествующих.

[2]) В школьных учебниках геометрии аксиома параллельности Евклида заменена следующим равносильным ей предложением:

Справедливость аксиомы параллельности Евклида не возбуждала сомнений. Неясность в отношении этой аксиомы заключалась в другом: законно ли отнесена она к категории аксиом? нельзя ли доказать ее с помощью других аксиом евклидовых «Начал» и, таким образом, перевести в разряд теорем?

Первоначально попытки доказать аксиому параллельности отражали отмеченное выше стремление уменьшить количество геометрических предложений, требующих эмпирического обоснования. С течением времени положение изменилось: было забыто опытное происхождение аксиом, и они стали трактоваться как истины, очевидные сами по себе, вне зависимости от какого бы то ни было опыта [1]). Такая точка зрения породила уверенность в том, что аксиома параллельности, которую трудно признать самоочевидной из-за ее сложности, не является в действительности аксиомой и, следовательно, можно найти доказательство содержащегося в ней утверждения. Однако многочисленные усилия в этом направлении не давали положительных результатов; аксиома параллельности, словно заколдованный клад, не открывала исследователям своей тайны. Обреченные на неудачу попытки доказать ее, потребовавшие огромной затраты умственного труда многих поколений ученых, были расплатой за идеалистическое толкование сущности аксиом.

Наиболее распространенным типом ошибочного доказательства аксиомы параллельности Евклида была замена ее равносильным ей предложением, например: *перпендикуляр и наклонная к одной и той же прямой пересекаются*; или: *существует треугольник, подобный данному треугольнику, но не равный ему;* или: *геометрическое место точек, равноудаленных от данной прямой и лежащих по одну сторону ее, есть прямая*; или: *через любые три точки*

Через точку вне прямой можно провести только одну прямую, параллельную данной прямой.

Две аксиомы евклидовой или иной геометрии считаются равносильными (эквивалентными), если из них вытекают одни и те же следствия при условии, что все остальные аксиомы этой геометрии сохраняют силу.

[1]) Известно, что слепорожденные, которым в зрелом возрасте операционным путем возвращено зрение, не могут на первых порах после операции отличить куб от шара, не ощупав их. Этим доказывается необходимость опыта для правильного восприятия геометрических образов, без чего не могут выработаться геометрические понятия.

можно провести либо прямую, либо окружность. Позже мы покажем, что все эти предложения ложны, если аксиома параллельности Евклида не имеет места. Следовательно, принимая любое из перечисленных предложений за аксиому, мы тем самым уже считаем справедливой евклидову аксиому параллельности, т. е. исходим из справедливости того, что требовалось доказать.

В своих исследованиях по теории параллельных линий Лобачевский пошел по иному пути. Начав с попыток доказать аксиому параллельности, он вскоре заметил, что одна из них приводит к совершенно неожиданным результатам. Эта попытка состояла в использовании метода доказательства от противного и основывалась на следующем соображении: если аксиома параллельности Евклида есть следствие других аксиом «Начал» и если, вопреки ей, допустить, что *через точку вне прямой в определяемой ими плоскости можно провести по меньшей мере две прямые, не пересекающие данной прямой*, то это допущение рано или поздно, в его ближайших или отдаленных следствиях, должно привести к противоречию. Между тем, рассматривая всё новые и новые следствия сделанного им допущения, парадоксальные с точки зрения евклидовой геометрии, Лобачевский убеждался, что они образуют стройную непротиворечивую систему теорем, способных составить основу новой научной теории.

Так был заложен фундамент неевклидовой геометрии; ее аксиома параллельности отличается от евклидовой и совпадает с приведенным выше допущением, которое в дальнейшем мы будем называть аксиомой параллельности Лобачевского [1]).

Всё же оставалось неясным, можно ли с уверенностью утверждать, что ни одно из бесчисленного множества возможных следствий аксиомы параллельности Лобачевского не приведет к противоречию. Лобачевский наметил решение этого вопроса: он указал, что непротиворечивость открытой им геометрии должна вытекать из возможности арифметизировать ее, т. е. возможности привести решение любого геометрического вопроса к арифметическим вычислениям и аналитическим преобразованиям, используя для этого формулы гиперболической тригонометрии, выведенные им же.

---

[1]) Впоследствии выяснилось, что, кроме геометрии, открытой Лобачевским, можно построить много других неевклидовых геометрий.

Позднее другими учеными были найдены строгие доказательства непротиворечивости геометрии Лобачевского.

Исследования Лобачевского в области гиперболической геометрии весьма обширны: они охватывают элементарную ее часть, тригонометрию, аналитическую и дифференциальную геометрию. Используя методы созданной им геометрии, Лобачевский нашел свыше 200 новых формул для вычисления определенных интегралов.

Открытие Лобачевского расценивалось его современниками и даже его учениками как чудовищная нелепость, как дерзкий вызов законам логики и здравому смыслу [1]). Не приходится удивляться такому отношению к гениальной идее, ломавшей привычные представления. Ведь так же враждебно была встречена и гелиоцентрическая теория Коперника, отрицавшая то, что казалось совершенно очевидным, и утверждавшая то, что казалось немыслимым. Требовались очень глубокие соображения, чтобы понять допустимость сосуществования двух различных геометрий. К изложению некоторых из этих соображений, наиболее доступных пониманию, мы и перейдем.

В школьных учебниках геометрии в разделе «Планиметрия» изучается плоскость независимо от окружающего ее пространства; иными словами, планиметрия есть геометрия евклидовой плоскости. Хорошо изучены также геометрии некоторых криволинейных поверхностей; примером может служить сферическая геометрия, находящая широкое применение в астрономии и других отраслях знания.

В каждой науке важное значение имеют простейшие понятия. В евклидовой геометрии такими понятиями являются точка, прямая, плоскость. Эти наименования сохраняются и

---

[1]) Нельзя, конечно, огульно заподозрить современных Лобачевскому ученых в неспособности понять его открытие: многие не высказали своего мнения о нем по той, возможно, причине, что область исследований Лобачевского не входила в круг их научных интересов; известно также, что знаменитый немецкий математик Карл Гаусс и выдающийся венгерский геометр Янош Больаи, пришедшие независимо от Лобачевского к мысли о возможности построить неевклидову геометрию, разделяли его взгляды. Однако Гаусс, опасаясь быть непонятым и осмеянным, ни разу не выступил в печати с поддержкой идей Лобачевского, а Больаи, видя, что его собственные исследования по неевклидовой геометрии (опубликованные в 1832 году) не получили признания, отошел от занятий математикой. Таким образом, Лобачевскому пришлось в полном одиночестве бороться за правоту своих идей.

в неевклидовых геометриях, причем «прямой» называется линия, по которой измеряется кратчайшее расстояние между двумя точками, а «плоскостью» — поверхность, обладающая следующим свойством: если две точки «прямой» принадлежат этой поверхности, то ей принадлежат и все остальные точки той же «прямой». Например, в сферической геометрии «плоскостью» и «прямыми» мы называем соответственно сферу и окружности ее больших кругов. Эта терминология вполне уместна, так как в любой геометрии «прямая» есть простейшая из линий, а «плоскость» — простейшая из поверхностей, причем первая обладает наиболее важным свойством евклидовой прямой, вторая — наиболее важным свойством евклидовой плоскости [1]).

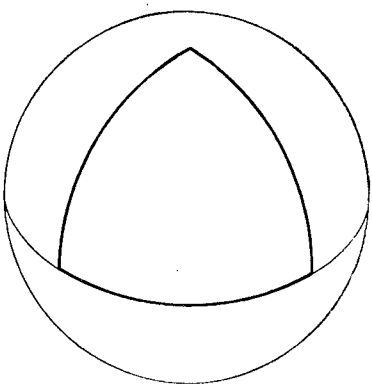

Рис. 1.

Отметим некоторые особенности сферической геометрии. Для наглядности будем рассматривать ее как геометрию поверхности глобуса. Нетрудно сообразить, что две «прямые» этой геометрии (например, два меридиана) всегда пересекаются в двух диаметрально противоположных точках глобуса. Далее, сумма углов сферического треугольника больше $2d$; например, у треугольника, ограниченного четвертью экватора и дугами двух меридианов (рис. 1), все три угла прямые [2]).

Известно, что в географии, наряду с глобусом, используются карты земной поверхности. Это равносильно изучению сферической геометрии путем рассмотрения карт сферы, что вполне возможно, если только указано, как по изображениям линий на карте находить их действительные длины и действительные величины углов между ними. Дело в том, что на карте получаются искаженные изображения, и характер

[1]) Заметим, что в проективной геометрии отсутствует понятие расстояния между двумя точками; в случае геометрий такого рода данная выше трактовка понятий «прямая» и «плоскость» не применима.

[2]) Углом между двумя линиями в точке их пересечения называется угол между касательными к ним в этой точке.

искажения не везде одинаков. Например, на карте земной поверхности, исполненной в проекции Меркатора[1]) (рис. 2), меридианам соответствуют параллельные прямые, к которым перпендикулярны прямые, соответствующие географическим параллелям, причем отрезок, изображающий 1° параллели, имеет, независимо от ее широты, одну и ту же длину,

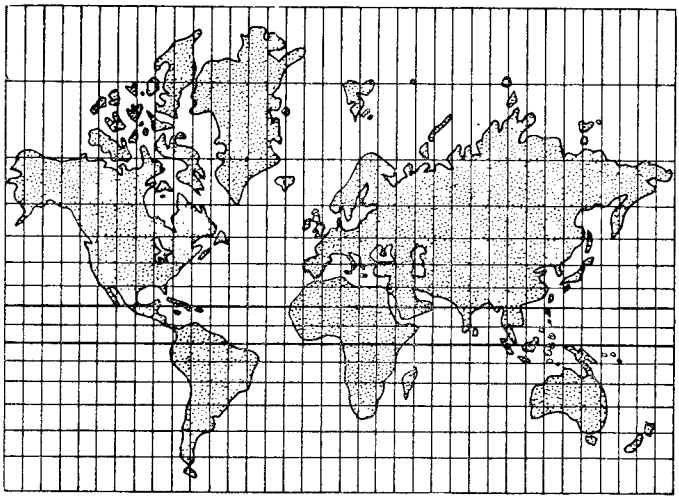

Рис. 2.

тогда как в действительности длина градуса параллели тем меньше, чем выше ее широта.

Поскольку поверхность имеет два измерения, то геометрию, изучающую фигуры, лежащие на определенной поверхности, принято называть двумерной, а самое поверхность — двумерным пространством. Издавна известны два вида двумерных геометрий: евклидова (для плоскости) и сферическая. Факту существования двумерной неевклидовой геометрии, а именно сферической, математики не придавали особого

---

[1]) Гергард Меркатор (1512—1594) — выдающийся фламандский картограф. Предложенная им в 1569 году картографическая проекция получила всеобщее распространение, и с тех пор в этой проекции составляются морские карты.

значения по той простой причине, что сфера рассматривалась в трехмерном евклидовом пространстве, и это заставляло забывать о неевклидовых свойствах сферы как таковой.

В результате исследований Лобачевского выяснилось, что мыслимы не только поверхности с неевклидовыми свойствами, но и трехмерные неевклидовы пространства.

Введение понятия трехмерных неевклидовых геометрий может вызвать недоумение, если не сделать следующих разъяснений.

Результаты изучения определенного класса явлений иногда удобно представлять в геометрической форме. Например, данные о росте производительности труда нередко приводятся в виде графиков и диаграмм. Это показывает, что с помощью геометрических образов можно описывать различные реальные процессы и состояния, не имеющие к геометрии прямого отношения.

Если рассматривать график как линию евклидовой плоскости, то становится ясным, что в приведенном выше примере использованы образы двумерной евклидовой геометрии. В более сложных случаях приходится прибегать к трехмерным и даже многомерным евклидовым и неевклидовым геометриям. Отсюда не следует, что все они описывают отношения протяженности; это — теории, пользующиеся в своих формулировках геометрическими терминами, которым, вообще говоря, приписывается содержание, не связанное с пространственными представлениями. Так, присоединяя к трем измерениям реального пространства в качестве четвертого измерения время, мы вводим понятие четырехмерного пространства, в котором определенный промежуток времени рассматривается как «отрезок прямой». В большинстве случаев такой подход создает только видимость наглядности, что все же облегчает до известной степени анализ явления, изучаемого этим методом.

Таким образом, построение неевклидовых геометрий оправдывается возможностью применять их выводы к реально существующим объектам. То обстоятельство, что эти выводы излагаются в терминах геометрии, не имеет существенного значения: геометрические формулировки нетрудно видоизменить так, чтобы они отвечали свойствам изучаемых предметов и явлений.

Заметим, что в приложениях математики часто практикуется замена одних понятий другими в тех случаях, когда

теория обслуживает подчиненные одним и тем же математическим законам, но качественно различные объекты [1]).

Особо следует сказать о трехмерных геометриях. Они могут рассматриваться, независимо от иных их приложений, как гипотезы, претендующие на описание свойств реального пространства. Вопрос о том, какая из этих гипотез ближе соответствует действительности, может быть решен только путем опытной проверки их положений.

Отметим следующий важный для дальнейшего изложения факт: в евклидовой плоскости можно построить, и притом не единственным способом, карту плоскости Лобачевского, подобно тому как это делается для сферы. Рассмотрение одной из таких карт мы положим в нашей книжке в основу изучения гиперболической геометрии.

Характерно, что геометрия Лобачевского получила всеобщее признание при следующих обстоятельствах. В 1868 году итальянский математик Евгений Бельтрами обнаружил, что в евклидовом пространстве существует поверхность, обладающая свойствами плоскости Лобачевского, вернее, некоторого куска этой плоскости (если рассматривать кратчайшие линии на этой поверхности как «прямые»). Это открытие, приведшее вскоре к построению различных карт плоскости Лобачевского, убедило ученых в справедливости идей великого русского геометра, послужило толчком к углубленному изучению его трудов и положило начало многочисленным исследованиям в области неевклидовых геометрий.

Открытие неевклидовых геометрий поставило перед физикой чрезвычайно сложную задачу: выяснить, является ли реальное физическое пространство евклидовым, как думали раньше, и если нет, то к какому типу неевклидовых пространств оно принадлежит [2]). Для решения этой задачи необходима опытная проверка справедливости аксиом, причем ясно, что с совершенствованием измерительных приборов возрастает надежность получаемых опытных данных и появляется возможность проникновения в такие детали, которые ускользали раньше от внимания исследователей.

[1]) Относительно практического применения этого принципа см. статью «Моделирование» в книге В. Г. Болтянского «Что такое дифференцирование?» (серия «Популярные лекции по математике», выпуск 17, стр. 61).

[2]) При рассмотрении этого вопроса следует считаться с возможной неоднородностью реального пространства, т. е. с тем обстоятельством, что его геометрическое строение может оказаться не везде одинаковым.

Таким образом, Лобачевский вернул геометрию к материалистическому истолкованию аксиом как предложений, констатирующих основные геометрические свойства пространства, осознанные человечеством в результате опыта.

В настоящее время нельзя считать решенным до конца вопрос о геометрической структуре реального физического пространства. Отметим все же, что на основании многочисленных данных современная теория относительности рассматривает реальное пространство как неевклидово, и притом более сложное по его геометрическим свойствам, чем пространство Лобачевского. Один из сильнейших ударов по убеждению в евклидовом строении реального пространства был нанесен открытием физического закона, согласно которому не существует скорости, превышающей скорость света.

Теперь мы можем ответить на вопрос, который нередко приходится слышать: какая же из двух геометрий — Евклида или Лобачевского — является истинной?

Относительно двумерных евклидовой и сферической геометрий аналогичный вопрос не возникает; совершенно очевидно, что обе они истинны, но каждая из них имеет свою область приложений: нельзя пользоваться формулами сферической геометрии для плоских фигур и формулами двумерной евклидовой геометрии для фигур на сфере. То же справедливо и в отношении различных трехмерных геометрий: каждая из них, будучи логически непротиворечивой, находит применение в определенной области, и притом не обязательно геометрического характера; однако она откажется служить, если приписать ее положениям универсальный характер.

Что касается геометрического строения реального пространства, то этот вопрос, как мы уже указывали, относится к компетенции физики и силами чистой геометрии не может быть разрешен. Особенность его заключается, между прочим, в том, что ни одна геометрия не отображает отношений протяженности с абсолютной точностью; например, в силу молекулярного строения материи не существует тел доступных осязанию размеров, которое обладало бы геометрическими свойствами идеального шара. Поэтому применение геометрических правил к решению конкретных задач неизбежно будет давать приближенные результаты. Таким образом, наше представление о геометрическом строении реального пространства сводится на деле к научно обоснованному убеждению, что определенная геометрия лучше других геометрий описывает действительные отношения протяженности.

Из того, что в теории относительности применяются формулы неевклидовой геометрии, не вытекает еще необходимости сдать в архив геометрию Евклида, как это случилось с астрологией, алхимией и подобными им лженауками. И та и другая геометрии представляют собой инструмент для изучения пространственных форм, но первая позволяет производить более тонкие исследования, вторая же достаточна для решения подавляющего большинства важных в практическом отношении задач с весьма высокой степенью точности, а так как вместе с тем она отличается большой простотой, то ей всегда будет обеспечено широкое применение.

Заканчивая наш краткий очерк, отметим то новое, что было внесено Лобачевским в развитие геометрических идей.

Научные заслуги этого выдающегося мыслителя не исчерпываются тем, что он сорвал покров с тысячелетней тайны аксиомы параллельности; значение его исследований неизмеримо шире.

Подвергнув критическому анализу одну из евклидовых аксиом, Лобачевский положил начало пересмотру некоторых исходных положений системы Евклида, что привело впоследствии к разработке строго научных принципов аксиоматического построения геометрии и других математических наук.

Открытие Лобачевским гиперболической геометрии вывело науку о пространственных формах из узких рамок евклидовой системы. Геометрия Лобачевского нашла непосредственное применение в теории определенных интегралов и в других областях математики.

Лобачевский вызвал к жизни разработку вопросов, которые не могли возникнуть при прежнем состоянии математики, в том числе вопроса о геометрическом строении реального пространства. Без его открытия не могла бы развиться теория относительности — одно из крупнейших достижений современной физики. Исходя из исследований Лобачевского, ученые построили теорию, позволяющую производить расчет процессов, происходящих внутри атомного ядра.

Отметим в заключение гносеологическое [1]) значение идей великого русского математика. До Лобачевского в геометрии в течение многих столетий господствовала идеалисти-

[1]) Гносеология — наука о познании.

ческая точка зрения, восходящая к философу античной Греции Платону: приписывая аксиомам евклидовой системы абсолютный характер, она отрицала их опытное происхождение. Лобачевский решительно порвал с этим воззрением и вернул геометрию на позиции материализма.

§ 3. ИНВЕРСИЯ

Пусть указано правило, позволяющее переходить от любой данной фигуры к другой так, что вторая фигура вполне определена, если задана первая, и обратно. Такой переход называется геометрическим преобразованием. К числу наиболее употребительных геометрических преобразований, наряду с параллельным перенесением, преобразованием подобия, вращением фигуры, проектированием, принадлежит также инверсия. Это преобразование широко применяется в математике, например, как метод решения задач на построение, в теории функций комплексного переменного, при изучении карт плоскости Лобачевского.

В настоящем параграфе мы даем определение инверсии и связанных с нею понятий и рассматриваем ряд основных ее свойств.

Пусть в плоскости α дана окружность k радиуса r с центром O и отличная от O точка A. Выберем на полупрямой OA точку A' так, чтобы произведение отрезков OA и OA' было равно квадрату радиуса окружности k:

$$OA \cdot OA' = r^2. \qquad (1)$$

Условимся говорить, что точки A и A' симметричны относительно окружности k.

Если одна из точек A, A' лежит вне окружности k, то другая лежит внутри k, и обратно; например, из неравенства $OA > r$ заключаем, принимая во внимание условие (1), что $OA' < r$. Если же точка A или A' лежит на окружности k, то A и A' совпадают.

Рассмотрим рис. 3, где AB — касательная к окружности k, BA' — перпендикуляр к OA. Так как OA' — проекция катета OB прямоугольного треугольника OAB на гипотенузу OA, то

$$OA \cdot OA' = OB^2 = r^2,$$

следовательно, точки A и A' симметричны относительно k. Отсюда ясен способ построения точки A', если дана точка A, и точки A, если дана точка A'.

Теорема 1. *Если окружность q проходит через две различные точки A и A', симметричные относительно окружности k, то окружности k и q взаимно ортогональны.*

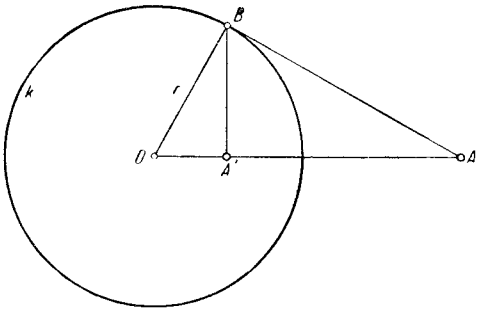

Рис. 3.

Две окружности называются взаимно ортогональными, если они пересекаются под прямым углом, т. е. касательные к ним в точке их пересечения (или, что то же, их

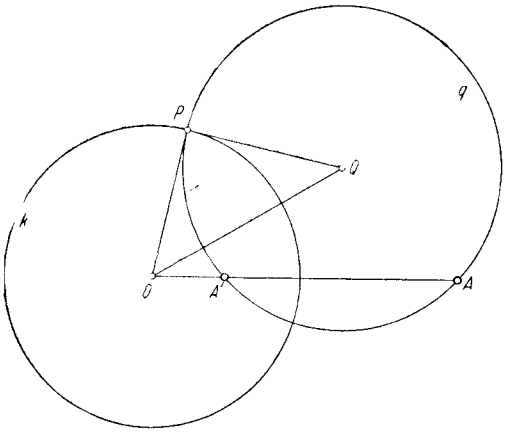

Рис. 4.

радиусы, проведенные в эту точку) взаимно перпендикулярны.

Пусть P — одна из точек пересечения окружностей k и q (рис. 4). Так как OP — радиус окружности k, то равенство (1) принимает вид: $OA \cdot OA' = OP^2$. С другой стороны,

произведение отрезков OA и OA' равно квадрату касательной, проведенной из точки O к окружности q; поэтому OP есть касательная к q. Следовательно, радиусы OP и QP данных окружностей взаимно перпендикулярны, и эти окружности взаимно ортогональны.

Заметим, что любая окружность, проходящая через две различные точки, симметричные относительно прямой, пересекает ее под прямым углом. Аналогия этого свойства с фактом, установленным в теореме 1, обусловила перенесение термина «симметрия» на случай двух точек, расположенных относительно данной окружности так, что любая проходящая через них окружность ортогональна к данной окружности.

Теорема 2. *Если окружности k и q взаимно ортогональны, то прямая, проходящая через центр O окружности k и пересекающая окружность q, пересекает ее в точках, симметричных относительно k.*

Обозначим точки пересечения этой прямой с q через A и A', а одну из общих точек окружностей k и q — через P (рис. 4). Поскольку данные окружности взаимно ортогональны, то прямая OP касается окружности q; поэтому $OA \cdot OA' = OP^2$. Отсюда заключаем, что точки A и A' симметричны относительно окружности k.

Теорема 3. *Пусть дан треугольник OAB, где O — центр окружности k, и точки A' и B', симметричные с A и B относительно k. Тогда*

$$\angle OAB = \angle OB'A' \quad \text{и} \quad \angle OBA = \angle OA'B'.$$

Рассмотрим рис. 5. Из равенства

$$OA \cdot OA' = OB \cdot OB',$$

вытекающего из условия (1), получим: $OA : OB' = OB : OA'$. Следовательно, треугольники OAB и $OB'A'$, имеющие общий угол AOB, подобны. Отсюда заключаем, что теорема верна.

Заметим, что около четырехугольника $ABB'A'$ можно описать окружность, так как $\angle A'AB + \angle A'B'B = 2d$. Из теоремы 1 вытекает, что эта окружность ортогональна к окружности k.

Рассмотрим теперь преобразование плоскости α, состоящее в следующем: каждые две точки этой плоскости, симметричные относительно окружности k, меняются местами. Такое преобразование называется инверсией, окружность k называется окружностью инверсии, ее

центр — полюсом инверсии. Если инверсия относительно k преобразует фигуру F в фигуру F', то говорят, что F симметрична с F', а F' симметрична с F относительно окружности k.

Заметим, что не существует точки, симметричной с полюсом инверсии относительно окружности инверсии.

Нетрудно видеть, что точки, лежащие вне круга, ограниченного окружностью инверсии, преобразуются в точки

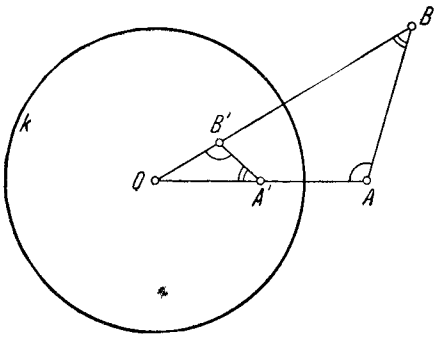

Рис. 5.

этого круга, исключая полюс инверсии, и обратно; точки окружности инверсии переходят в себя; прямая, проходящая через полюс инверсии O, преобразуется в себя, но теряет при этом точку O.

Теорема 4. *Инверсия преобразует прямую, не проходящую через полюс инверсии, в окружность, проходящую через полюс инверсии.*

Пусть A — основание перпендикуляра, опущенного из полюса инверсии O на прямую l, B — произвольная точка прямой l, A' и B' — точки, симметричные соответственно с A и B относительно окружности инверсии k (рис. 6). Построим на отрезке OA' как на диаметре окружность q. В силу теоремы 3 $\angle OB'A' = \angle OAB$, поэтому $\angle OB'A' = d$; следовательно, точка B' лежит на окружности q. С другой стороны, пусть C' — любая отличная от O точка окружности q; тогда прямая OC' пересечет l в некоторой точке C, которая, как легко видеть, преобразуется при данной инверсии в точку C'. Итак, теорема доказана, но нужно учитывать, что прямая l преобразуется в фигуру, состоящую из окружности q без точки O.

Заметим, что центр окружности q лежит на перпендикуляре, опущенном из O на l.

Если прямая l не имеет общих точек с окружностью инверсии k, то окружность q лежит внутри k.

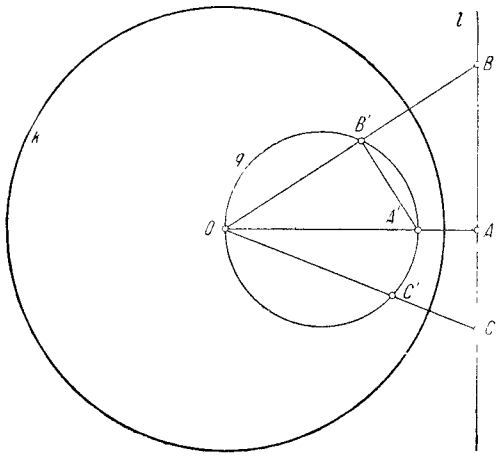

Рис. 6.

Если l касается k в некоторой точке, то q касается k в той же точке.

Если l и k пересекаются, то q проходит через точки их пересечения.

Теорема 5. *Инверсия преобразует окружность, проходящую через полюс инверсии, в прямую, не проходящую через полюс инверсии.*

Пусть O (полюс инверсии), A и B — три различные точки окружности q, A' и B' — точки, симметричные с A и B относительно окружности инверсии. В силу теоремы 4 прямая $A'B'$ преобразуется в окружность, проходящую через O, A, B, т. е. в окружность q, а отсюда следует, что q преобразуется в прямую $A'B'$.

Теорема 6. *Инверсия преобразует окружность, не проходящую через полюс инверсии, в окружность, также не проходящую через полюс инверсии.*

Пусть k — окружность инверсии радиуса r с центром O, q — данная окружность, не проходящая через O (рис. 7). Возьмем на q произвольную точку A и обозначим через B вторую точку пересечения прямой OA с q, через A' и B' —

точки, симметричные соответственно с A и B относительно k. Тогда

$$OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = r^2.$$

Отсюда

$$\frac{OA}{OB'} = \frac{OB}{OA'} \tag{2}$$

и

$$OA \cdot OB \cdot OA' \cdot OB' = r^4.$$

Произведение

$$OA \cdot OB = g$$

не изменится, в силу известных теорем элементарной геометрии, при перемещении точки A по q. Следовательно,

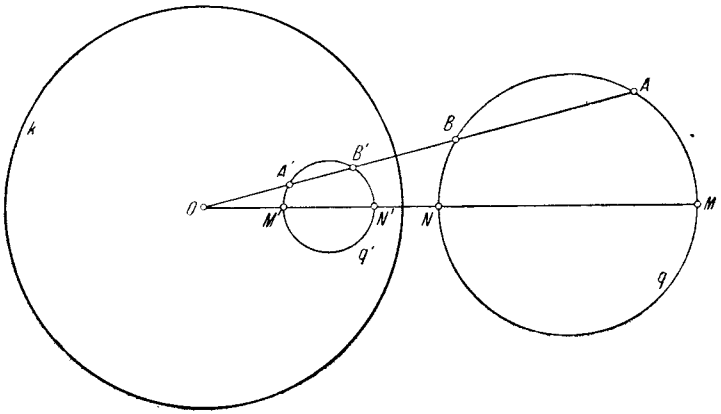

Рис. 7.

g — постоянная величина, положительная, если O лежит вне q, и отрицательная, если O лежит внутри q (так как в последнем случае направления отрезков OA и OB противоположны).

Из двух последних равенств находим: $OA' \cdot OB' = \frac{r^4}{g}$, следовательно,

$$\frac{OA}{OB'} \cdot \frac{OB}{OA'} = \frac{g^2}{r^4},$$

или, принимая во внимание соотношение (2),

$$\frac{OA}{OB'} = \frac{g}{r^2}$$

(знак выбран правильно, так как отрезки OB и OB' имеют одно и то же направление). Из последнего равенства вытекает, что фигуры, описанные точками A и B', подобны; следовательно, теорема доказана: точка B' описывает окружность (обозначим ее через q').

Полюс инверсии O будет центром подобия окружностей q и q', внешним, если $g > 0$, и внутренним, если $g < 0$. В первом случае O лежит вне, во втором — внутри окружностей q и q'.

Если окружность q касается окружности k в некоторой точке, то q' касается k в той же точке.

Если окружности k и q пересекаются, то q' проходит через точки их пересечения.

Окружность q, ортогональная к k, преобразуется при инверсии относительно k в себя (q' совпадает с q), что вытекает из теоремы 2.

Если линия центров окружностей k и q пересекает q в точках M и N, то отрезок $M'N'$, где M' и N' — точки, симметричные с M и N относительно k, будет диаметром окружности q' (рис. 7). Этим замечанием можно воспользоваться для построения окружности q'.

Отметим, что центры окружностей q и q' не симметричны относительно окружности инверсии k.

Теорема 7. *Точки пересечения двух окружностей p и q, ортогональных к окружности k, симметричны относительно k.*

Теорема очевидна, так как каждая из окружностей p и q преобразуется при инверсии относительно k в себя, следовательно, точки их пересечения A и A_1 поменяются местами (рис. 8).

Теорема 8. *Если M и M' — симметричные относительно окружности k точки двух симметричных относительно k линий m и m', то касательные к m и m' в точках M и M' либо перпендикулярны к прямой MM', либо образуют с ней равнобедренный треугольник с основанием MM'.*

Берем на m отличную от M точку N и строим точку N', симметричную с N относительно k (рис. 9). Очевидно, N' лежит на m'. Прямые MM' и NN' проходят через центр O окружности k. Строим прямые MN и $M'N'$; пусть они пересекутся в точке P. Если

$$\angle MON = \theta, \quad \angle OMN = \varphi,$$

то в силу теоремы 3 $\angle ON'M' = \varphi$. Поэтому в треугольнике $MM'P$

$$\angle M = \varphi, \quad \angle M' = \varphi + \theta.$$

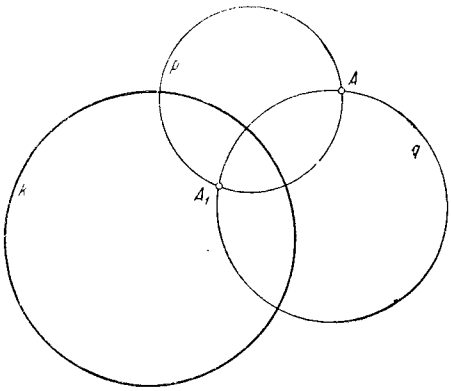

Рис. 8.

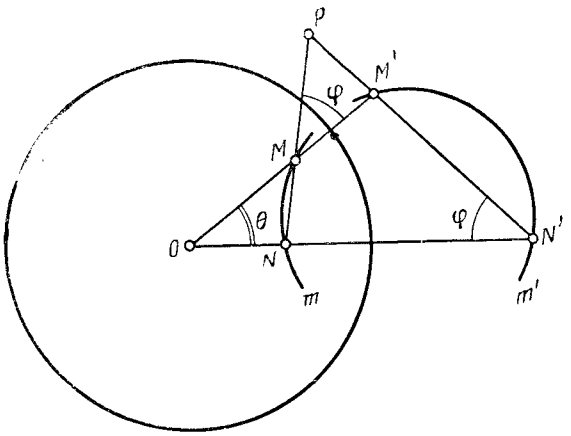

Рис. 9.

Пусть угол θ стремится к нулю при условии, что точка M неподвижна. Тогда в пределе секущие MN и $M'N'$ перейдут в касательные к m и m' в точках M и M',

а треугольник $MM'P$ станет равнобедренным. Действительно,

$$\lim_{\theta\to 0}(\varphi+\theta)=\lim_{\theta\to 0}\varphi+\lim_{\theta\to 0}\theta=\lim_{\theta\to 0}\varphi.$$

Итак, теорема доказана.

Теорема 9. *Инверсия не изменяет величины угла.*

Рассмотрим линии m и n, пересекающиеся в точке A. Пусть m, n, A преобразуются при инверсии относительно окружности k в m', n', A'. Из теоремы 8 вытекает, что угол между касательными к m и n в точке A равен углу между касательными к m' и n' в точке A', что и требовалось доказать.

Преобразование, не изменяющее величин углов, называется конформным. Из предыдущего следует, что инверсия есть конформное преобразование.

§ 4. КАРТА ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО

Рассмотрим плоскость ω и в ней прямую u, делящую ω на полуплоскости τ и τ'. Пусть полуплоскость τ представляет собой карту некоторого двумерного пространства H. Мы будем различать длину s линии пространства H и длину σ ее изображения на данной карте; величины s и σ мы будем называть соответственно гиперболической и евклидовой длинами.

В основу измерения длин на рассматриваемой нами карте мы положим следующие принципы:

1°. Гиперболическая длина отрезка MN, параллельного прямой u и находящегося от нее на расстоянии y, равна $\frac{MN}{y}$, т. е. равна частному от деления евклидовой длины этого отрезка на его евклидово расстояние от u.

2°. Если σ — евклидова, s — гиперболическая длина дуги кривой (или отрезка прямой, не параллельной u), y и y' — соответственно наименьшее и наибольшее евклидовы расстояния ее точек от u, причем $y\neq 0$ (рис. 10), то выполняются неравенства:

$$\frac{\sigma}{y'}<s<\frac{\sigma}{y}.$$

Позже мы убедимся, что пространство H, карта которого обладает перечисленными выше свойствами, есть плоскость Лобачевского.

Исходя из принципов 1° и 2°, нетрудно указать общий способ измерения гиперболических длин.

Найдем сначала гиперболическую длину s дуги AB, обладающей следующими свойствами: если точка перемещается по этой дуге от A к B, то ее расстояние от прямой u возрастает; расстояние точки A от u не равно нулю; дуга AB — плавная, т. е. не имеет изломов (рис. 11).

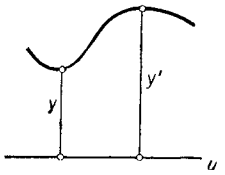

Рис. 10.

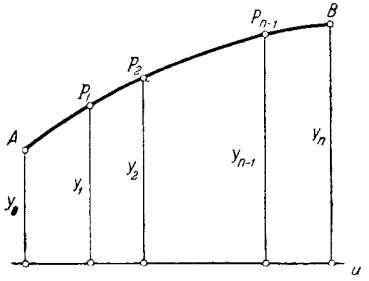

Рис. 11.

Отметим на дуге AB, следуя от A к B, точки

$$A,\ P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_{n-1},\ B. \qquad (*)$$

Пусть величины

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_{n-1},\ y_n,$$
$$\sigma_1,\ \sigma_2,\ \ldots,\ \sigma_n,$$
$$\zeta_1,\ \zeta_2,\ \ldots,\ \zeta_n$$

обозначают соответственно: евклидовы расстояния точек (*) от прямой u; евклидовы длины дуг AP_1, P_1P_2, ..., $P_{n-1}B$, являющихся частями дуги AB; евклидовы длины хорд, стягивающих эти дуги.

Составим суммы:

$$\Sigma = \frac{\sigma_1}{y_1} + \frac{\sigma_2}{y_2} + \ \ldots\ + \frac{\sigma_n}{y_n},$$
$$\Sigma' = \frac{\sigma_1}{y_0} + \frac{\sigma_2}{y_1} + \ \ldots\ + \frac{\sigma_n}{y_{n-1}},$$
$$Z = \frac{\zeta_1}{y_1} + \frac{\zeta_2}{y_2} + \ \ldots\ + \frac{\zeta_n}{y_n}.$$

В силу принципа 2° будем иметь:

$$\Sigma < s < \Sigma', \qquad (3)$$

так как согласно условию $0 < y_0 < y_1 < \ldots < y_n$. Рассмотрим разность

$$\Sigma' - \Sigma = \frac{\sigma_1}{y_0 y_1}(y_1 - y_0) + \frac{\sigma_2}{y_1 y_2}(y_2 - y_1) + \ \ldots$$
$$\ldots\ + \frac{\sigma_n}{y_{n-1} y_n}(y_n - y_{n-1}).$$

Правая часть этого равенства увеличится, если каждую из величин $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ заменить наибольшей из них (обозначим ее через σ'), а каждый знаменатель заменить на y_0^2. Следовательно,

$$\Sigma' - \Sigma < \frac{\sigma'}{y_0^2}(y_1 - y_0 + y_2 - y_1 + \ \ldots\ + y_n - y_{n-1}) =$$
$$= \frac{\sigma'}{y_0^2}(y_n - y_0).$$

Если σ' стремится к нулю, то из этого неравенства вытекает, что разность $\Sigma' - \Sigma$ также стремится к нулю.

Преобразуем теперь сумму Z к виду:

$$Z = \frac{\sigma_1}{y_1} \cdot \frac{\zeta_1}{\sigma_1} + \frac{\sigma_2}{y_2} \cdot \frac{\zeta_2}{\sigma_2} + \ \ldots\ + \frac{\sigma_n}{y_n} \cdot \frac{\zeta_n}{\sigma_n}.$$

Отсюда, обозначая через α наименьшее, через β наибольшее из отношений

$$\frac{\zeta_1}{\sigma_1},\ \frac{\zeta_2}{\sigma_2},\ \ldots,\ \frac{\zeta_n}{\sigma_n},$$

получим

$$\alpha\Sigma \leqslant Z \leqslant \beta\Sigma. \qquad (4)$$

Пусть число n неограниченно возрастает и пусть вместе с тем каждая из величин $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$, а значит, и величина σ' стремится к нулю. Тогда разность $\Sigma' - \Sigma$ будет, как доказано выше, стремиться к нулю, величины же α и β будут стремиться к единице [1]). В связи с этим из неравенств (3) и (4) вытекает, что каждая из сумм Σ, Σ', Z будет стремиться к одному и тому же пределу и этот предел равен гиперболической длине s дуги AB.

---

[1]) Известно, что отношение хорды к дуге, которую она стягивает, стремится к единице, если длина дуги стремится к нулю (здесь мы имеем в виду дугу плавной линии).

так как согласно условию $0 < y_0 < y_1 < \ldots < y_n$. Рассмотрим разность

$$\Sigma' - \Sigma = \frac{\sigma_1}{y_0 y_1}(y_1 - y_0) + \frac{\sigma_2}{y_1 y_2}(y_2 - y_1) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{\sigma_n}{y_{n-1} y_n}(y_n - y_{n-1}).$$

Правая часть этого равенства увеличится, если каждую из величин $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ заменить наибольшей из них (обозначим ее через σ'), а каждый знаменатель заменить на y_0^2. Следовательно,

$$\Sigma' - \Sigma < \frac{\sigma'}{y_0^2}(y_1 - y_0 + y_2 - y_1 + \ldots + y_n - y_{n-1}) =$$
$$= \frac{\sigma'}{y_0^2}(y_n - y_0).$$

Если σ' стремится к нулю, то из этого неравенства вытекает, что разность $\Sigma' - \Sigma$ также стремится к нулю.

Преобразуем теперь сумму Z к виду:

$$Z = \frac{\sigma_1}{y_1} \cdot \frac{\zeta_1}{\sigma_1} + \frac{\sigma_2}{y_2} \cdot \frac{\zeta_2}{\sigma_2} + \ldots + \frac{\sigma_n}{y_n} \cdot \frac{\zeta_n}{\sigma_n}.$$

Отсюда, обозначая через α наименьшее, через β наибольшее из отношений

$$\frac{\zeta_1}{\sigma_1}, \frac{\zeta_2}{\sigma_2}, \ldots, \frac{\zeta_n}{\sigma_n},$$

получим

$$\alpha\Sigma \leqslant Z \leqslant \beta\Sigma. \qquad (4)$$

Пусть число n неограниченно возрастает и пусть вместе с тем каждая из величин $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$, а значит, и величина σ' стремится к нулю. Тогда разность $\Sigma' - \Sigma$ будет, как доказано выше, стремиться к нулю, величины же α и β будут стремиться к единице [1]). В связи с этим из неравенств (3) и (4) вытекает, что каждая из сумм Σ, Σ', Z будет стремиться к одному и тому же пределу и этот предел равен гиперболической длине s дуги AB.

---

[1]) Известно, что отношение хорды к дуге, которую она стягивает, стремится к единице, если длина дуги стремится к нулю (здесь мы имеем в виду дугу плавной линии).

Удобнее всего пользоваться суммой Z, поскольку в ней фигурируют длины евклидовых отрезков, а не дуг. Итак,

$$s = \lim Z = \lim\left(\frac{\zeta_1}{y_1} + \frac{\zeta_2}{y_2} + \ldots + \frac{\zeta_n}{y_n}\right), \qquad (5)$$

где переход к пределу совершается при указанных выше условиях.

Заметим, что в равенстве (5) за y_1 можно принять расстояние произвольной точки отрезка AP_1 от прямой u, за y_2 — расстояние произвольной точки отрезка P_1P_2 от u и т. д. При этом сумма Z может изменить свою величину, но ее предел не изменится.

Если дугу некоторой линии можно разбить на конечное число частей, удовлетворяющих условиям, поставленным выше в отношении дуги AB, то ее гиперболическая длина представляет собой сумму гиперболических длин этих частей. Например, дугу AD, показанную на рис. 12, разбиваем на

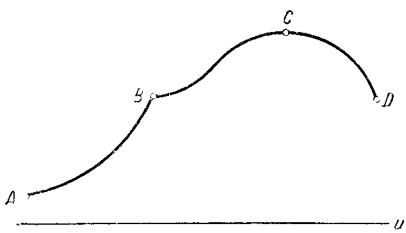

Рис. 12.

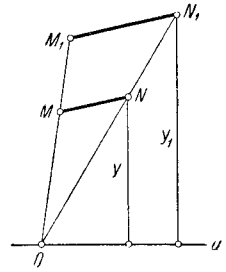

Рис. 13.

части AB, BC и CD, но точки деления на дуге CD отмечаем, следуя от D к C.

Пусть точки полуплоскости τ переместятся так, что гиперболическая длина любой дуги, лежащей в этой полуплоскости, будет равна гиперболической длине той же дуги в новом ее положении. Такое перемещение точек мы будем называть гиперболическим движением. Это понятие аналогично понятию движения евклидовой плоскости, например повороту евклидовой плоскости на некоторый угол около какой-либо ее точки.

Если гиперболическое движение преобразует фигуру F в F_1, то фигуры F и F_1 называются гиперболически равными.

Рассмотрим простейшие виды гиперболических движений.

1) Если каждую точку полуплоскости τ перенести на одно и то же расстояние в одном и том же направлении параллельно прямой u, то каждая фигура преобразуется в гиперболически равную ей фигуру, так как не изменяется ни ее евклидова величина, ни расстояния ее точек от u.

Отсюда заключаем, что *евклидов сдвиг полуплоскости τ вдоль прямой u есть гиперболическое движение.*

2) Пусть преобразование подобия с центром подобия в произвольной точке O прямой u и с положительным коэффициентом подобия преобразует отрезок MN в отрезок M_1N_1 (рис. 13). Обозначим через y и y_1 соответственно расстояния точек N и N_1 от прямой u. В силу подобия треугольников OMN и OM_1N_1 будем иметь: $\frac{MN}{y} = \frac{M_1N_1}{y_1}$.

Отсюда и из равенства (5) вытекает, что при указанном преобразовании не изменяется гиперболическая длина определенной дуги любой линии.

Следовательно, *преобразование подобия с центром подобия на прямой u и с положительным коэффициентом подобия есть гиперболическое движение.*

Коэффициент подобия берется положительным для того, чтобы отрезок M_1N_1 оказался расположенным в полуплоскости τ, а не в полуплоскости τ'.

3) Рассмотрим инверсию относительно окружности k произвольного радиуса R с центром O на прямой u (рис. 14).

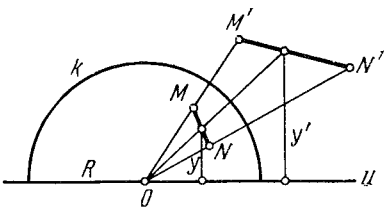

Рис. 14.

Пусть M и N — достаточно близкие друг к другу точки, M' и N' — симметричные им точки относительно окружности k. Обозначим через y и y' расстояния от u точек пересечения биссектрисы угла MON с отрезками MN и $M'N'$. Так как треугольники OMN и $ON'M'$ подобны, то

$$\frac{MN}{y} = \frac{M'N'}{y'}.$$

Отсюда и из равенства (5) заключаем, что при данном преобразовании не изменяется гиперболическая длина определенной дуги любой линии.

Следовательно, *инверсия относительно окружности любого радиуса с центром на прямой и есть гиперболическое движение.*

4) Наконец, нетрудно убедиться, что *преобразование симметрии относительно оси, перпендикулярной к прямой и, есть гиперболическое движение.*

Заметим, что каждое из рассмотренных гиперболических движений есть конформное преобразование. Это очевидно в отношении сдвигов полуплоскости τ вдоль прямой u, а также преобразований подобия и симметрии; что касается инверсии, то ее конформность доказана в § 3.

Так как гиперболическое движение обладает свойством переводить любую фигуру в гиперболически равную ей, то тем же свойством обладает и преобразование, представляющее собой последовательность нескольких гиперболических движений, в силу чего такое преобразование также является гиперболическим движением.

Отметим без доказательства, что любое гиперболическое движение можно представить в виде последовательности конечного числа рассмотренных выше простейших гиперболических движений.

Покажем теперь, что в полуплоскости τ с установленными для нее правилами измерения длин осуществляются положения геометрии Лобачевского.

Нам придется рассматривать в полуплоскости τ некоторые фигуры, характеризующиеся теми же свойствами, что и соответствующие фигуры геометрии Евклида, но, возможно, отличающиеся от последних по форме; мы будем сохранять для них термины евклидовой геометрии с приставкой «гиперболический»: например, гиперболической прямой мы будем называть линию, по которой измеряется кратчайшее гиперболическое расстояние между любыми двумя ее точками; гиперболической окружностью мы будем называть геометрическое место точек, находящихся на одном и том же гиперболическом расстоянии от данной точки.

Выясним, какие линии полуплоскости τ являются гиперболическими прямыми.

Гиперболическими прямыми будут, прежде всего, евклидовы полупрямые, перпендикулярные к прямой u, что вытекает из следующих соображений.

Пусть точки A и B лежат на перпендикуляре к прямой u (рис. 15). Соединим эти точки отрезком прямой AmB и какой-нибудь кривой или ломаной AnB. Пусть две достаточно близкие друг к другу прямые a и b, параллельные u, пересекают отрезок AmB в точках C и D, а линию AnB — в точках E и F. Так как евклидова длина отрезка CD, вообще говоря, меньше евклидовой длины дуги EF, а их гиперболические длины можно считать равными $\frac{CD}{y}$ и $\frac{EF}{y}$, где y — расстояние точки D (или F) от прямой u, то гиперболическая длина отрезка CD, вообще говоря, меньше гиперболической длины дуги EF (эти гиперболические длины будут равны между собой лишь при условии, что дуга EF есть отрезок евклидовой прямой, перпендикулярной к u; ясно, что это условие не всегда выполняется, так как в противном случае дуга AnB совпала бы с отрезком AmB). Отсюда вытекает, что гиперболическая длина отрезка AmB меньше гиперболической длины дуги AnB, что и требовалось доказать.

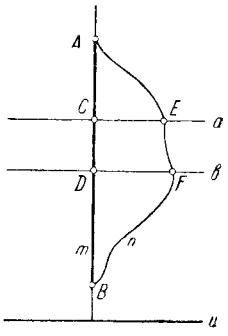

Рис. 15.

Покажем теперь, что полуокружность евклидовой окружности k с центром на прямой u также есть гиперболическая прямая.

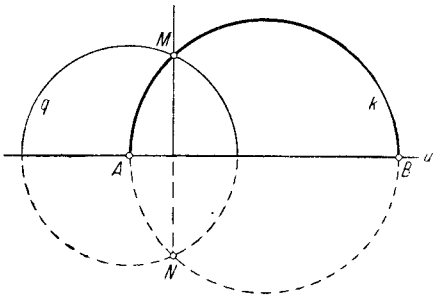

Рис. 16.

Пусть k пересекает прямую u в точках A и B (рис. 16). Опишем окружность q с центром в точке A и примем ее за окружность инверсии. Пусть k и q пересекаются в точках M и N. При инверсии относительно q окружность k, проходящая через полюс инверсии, преобразуется в пря-

мую MN (см. § 3). Так как инверсия есть гиперболическое движение, а прямая MN перпендикулярна к u, то отсюда видим, что полуокружность k гиперболическим движением преобразуется в гиперболическую прямую. Следовательно, эта полуокружность также является гиперболической прямой.

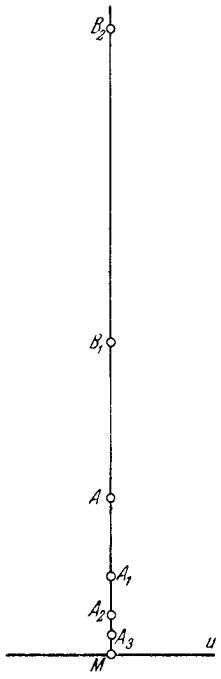

Рис. 17.

Итак, гиперболическими прямыми полуплоскости τ будут евклидовы полупрямые, перпендикулярные к прямой u, и евклидовы полуокружности с центрами на прямой u. Ниже, рассматривая аксиому 1, мы убедимся, что иных гиперболических прямых не существует.

Восставим в полуплоскости τ перпендикуляр к прямой u в произвольной ее точке M (рис. 17), возьмем на нем точку A и построим точки A_1, A_2, A_3, ... так, чтобы выполнялись равенства:

$$AA_1 = A_1M, \quad A_1A_2 = A_2M,$$
$$A_2A_3 = A_3M, \ldots$$

Иными словами, A_1 есть середина отрезка AM, A_2 — середина отрезка A_1M, A_3 — середина отрезка A_2M и т. д.

Рассмотрим преобразование подобия с центром подобия M и коэффициентом подобия $^1/_2$. Это преобразование есть гиперболическое движение, переводящее точки A, A_1, A_2, ... соответственно в точки A_1, A_2, A_3, ... Отсюда вытекает, что гиперболические длины отрезков AA_1, A_1A_2, A_2A_3, ... равны между собой. Таким образом, выполненное нами построение сводится к отложению от точки A на гиперболической прямой AM гиперболически равных между собой отрезков AA_1, A_1A_2, A_2A_3, ..., причем, как видно из построения, мы никогда не дойдем до точки M, сколько бы таких отрезков ни построили. Следовательно, M есть бесконечно удаленная точка гиперболической прямой AM. Поскольку M — произвольная точка прямой u, то из предыдущего заключаем, что каждая точка прямой u есть бесконечно удаленная точка полуплоскости τ.

Процесс отложения на гиперболической прямой AM гиперболически равных между собой отрезков AB_1, B_1B_2, B_2B_3, ... (рис. 17) можно произвести и в направлении, противоположном рассмотренному выше, причем и этот процесс будет бесконечным. Отсюда следует, что точка прямой AM, бесконечно удаленная в смысле евклидовой геометрии, будет вместе с тем бесконечно удаленной точкой гиперболической прямой AM.

Всякая точка гиперболической прямой AM, кроме двух указанных выше ее точек, будет находиться на конечном гиперболическом расстоянии от A, так как при достаточно большом конечном значении целого положительного числа n она окажется лежащей либо на отрезке AA_n, либо на отрезке AB_n.

Итак, гиперболическая прямая AM, а значит и каждая гиперболическая прямая, имеет две и только две бесконечно удаленные точки.

Если гиперболическая прямая изображается евклидовой полуокружностью с центром на прямой u, то точки пересечения ее с u будут ее бесконечно удаленными точками.

Заметим, что евклидова прямая имеет только одну бесконечно удаленную точку; это — общая точка данной прямой и всех параллельных ей прямых.

Теперь нетрудно убедиться, что в полуплоскости τ выполняются все плоскостные аксиомы геометрии Лобачевского. Мы ограничимся рассмотрением двух аксиом.

Аксиома 1. *Через две различные точки можно провести одну и только одну гиперболическую прямую.*

Если данные точки A и B лежат на евклидовом перпендикуляре к прямой u, то этот перпендикуляр будет искомой гиперболической прямой. В противном случае находим на прямой u точку N, равноотстоящую от A и B, и описываем из центра N радиусом NA евклидову полуокружность (рис. 18); это — искомая гиперболическая прямая.

Докажем, что через две различные точки A и B не могут проходить две различные гиперболические прямые l и l'. Достаточно предположить, что A и B лежат на евклидовом перпендикуляре l к прямой u (рис. 19), так как всякий иной случай приводится к этому с помощью надлежащего гиперболического движения. При таком расположении точек A и B кратчайшее гиперболическое расстояние между ними измеряется, как было доказано выше, *только* по евклидовой прямой l, поэтому на отрезке AB l и l'

совпадают. Допустим теперь, что точка C, лежащая на l', не лежит на l, причем B находится на l' между A и C. Тогда дуга AC евклидовой полуокружности k с центром на u принадлежит гиперболической прямой, не совпадающей на отрезке AC с l', что, как мы сейчас видели, невозможно. Итак, l и l' полностью совпадают.

Отсюда вытекает, что не существует иных гиперболических прямых, кроме евклидовых полупрямых, перпендикулярных к u, и евклидовых полуокружностей с центрами

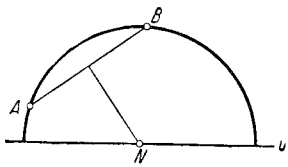

Рис. 18.

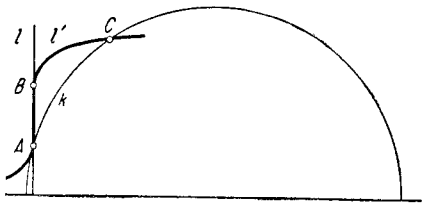

Рис. 19.

на u: через любые две данные точки проходит единственная гиперболическая прямая, и притом одного из двух этих видов.

Аксиома 2. *Через точку P, не лежащую на гиперболической прямой p, можно провести две гиперболические прямые, параллельные p.*

Две гиперболические прямые называются параллельными, если они имеют общую бесконечно удаленную точку. В частности, гиперболические прямые, изображенные в виде евклидовых перпендикуляров к u, параллельны: их общая бесконечно удаленная точка в полуплоскости τ та же, что и в евклидовой плоскости ω.

Обозначим бесконечно удаленные точки гиперболической прямой p через A и B (рис. 20). Проведем через P и A евклидову полуокружность m с центром M на прямой u, через P и B — евклидову полуокружность n с центром N на u. Евклидовы полуокружности m и n будут искомыми гиперболическими прямыми; они параллельны гиперболической прямой p в различных ее направлениях: m — в направлении от B к A, n — в направлении от A к B.

Через точку P проходят гиперболические прямые трех родов: 1) пересекающие прямую p, 2) параллельные p, 3) не пересекающие прямой p и не параллельные ей.

Существует бесконечное множество гиперболических прямых первого рода, бесконечное множество гиперболических прямых третьего рода и только две — второго рода.

Для построения гиперболической прямой первого рода нужно из произвольной точки K отрезка MN как из центра

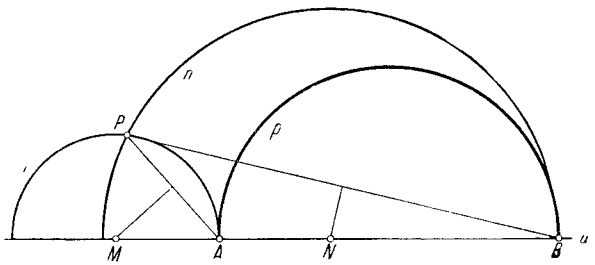

Рис. 20.

описать полуокружность k радиуса KP (рис. 21). Если выполнить такое же построение, приняв за центр полуокружности произвольную точку L прямой u, лежащую вне отрезка MN, то получим гиперболическую прямую l третьего рода (тот же рисунок).

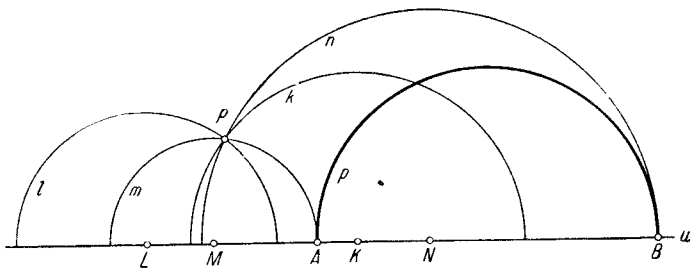

Рис. 21.

Теперь ясно, что аксиома 2 равносильна аксиоме параллельности Лобачевского, сформулированной в § 2.

Если две гиперболические прямые не пересекаются и не параллельны, то их называют расходящимися. Например, прямые p и l (рис. 21) расходятся.

Итак, в полуплоскости τ выполняются аксиомы, а значит, и теоремы геометрии Лобачевского. Поэтому полуплоскость τ с установленными для нее выше правилами измерения длин представляет собой плоскость Лобачевского, или, точнее, карту плоскости Лобачевского в евклидовой плоскости.

Поучительно сопоставить эту карту с картой земной поверхности, исполненной в проекции Меркатора; на последней меридианы изображены в виде параллельных прямых, к которым перпендикулярны прямые, изображающие параллели (см. рис. 2 на стр. 14). «Прямыми» на сфере следует считать окружности больших кругов, в частности меридианы. Параллели, исключая экватор, не являются «прямыми», но на карте они изображены в виде евклидовых прямых. Аналогично в полуплоскости τ из евклидовых прямых, перпендикулярных к прямой u и параллельных ей, первые являются гиперболическими прямыми, вторые нет (подробнее о них будет сказано в § 7).

Далее, длина градуса параллели тем меньше, чем выше ее широта, но на карте Меркатора отрезок, равный 1° параллели, имеет одну и ту же длину независимо от широты параллели. Аналогичную картину мы наблюдаем и в полуплоскости τ (см. принцип 1°).

Важно отметить, что карта τ конформна, т. е. евклидова величина угла на этой карте равна его действительной величине в плоскости Лобачевского.

Докажем это сначала для случая прямого угла. Опишем полуокружность k с центром в точке M прямой u и восставим в M к u перпендикуляр p (рис. 22). Рассмотрим углы *1*, *2*, *3*, *4*, образованные гиперболическими прямыми k и p. Существует гиперболическое движение, преобразующее углы *1* в *2* и *3* в *4* (симметрия относительно p), и гиперболическое движение, преобразующее углы *1* в *3* и *2* в *4* (инверсия относительно k). Отсюда вытекает, что в плоскости Лобачевского (как и на карте τ) $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4$, следовательно, каждый из этих углов — прямой.

Воспользовавшись конфигурацией рисунка 22, обозначим точку пересечения линий k и p через A, а одну из точек пересечения линий k и u — через N (рис. 23). Опишем из центра N евклидову полуокружность n радиуса NA. Она разделит угол *1*, показанный на рис. 22, на два угла — *5* и *6*, евклидовы величины которых, как легко убедиться, равны между собой. Инверсия относительно n преобразует k в p и p в k, следовательно, углы *5* и *6* поменяются местами. Отсюда заключаем, что не только евклидовы, но и действительные (гиперболические) величины углов *5* и *6* равны между собой, т. е. в плоскости Лобачевского (как и на карте τ) каждый из них равен половине прямого угла.

Обозначим через L точку пересечения линий u и n, лежащую по ту же сторону точки M, что и точка N, и опишем из центра L окружность l радиуса LA (рис. 23). Она разделит угол 6 на углы 7 и 8. Нетрудно убедиться, что

$$\angle 8 = \angle NAL = \frac{1}{4}d,$$

а так как $\angle 6 = \frac{1}{2}d$, то $\angle 7 = \frac{1}{4}d$, следовательно, евклидовы величины углов 7 и 8 равны между собой. Вместе

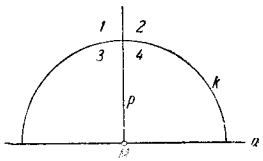

Рис. 22.

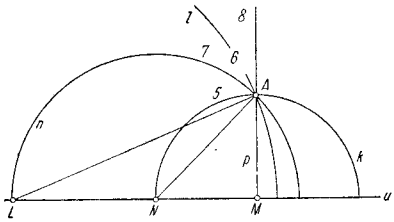

Рис. 23.

с тем равны между собой также и гиперболические их величины, поскольку при инверсии относительно окружности l эти углы меняются местами.

Аналогично доказываем, что углы, имеющие на карте τ евклидову величину $\frac{1}{8}d$, $\frac{1}{16}d$, ..., имеют такую же величину и в плоскости Лобачевского.

Так как каждый угол можно представить в виде суммы конечного числа или в виде предела суммы неограниченно возрастающего числа слагаемых вида

$$d, \quad \frac{1}{2}d, \quad \frac{1}{4}d, \quad \frac{1}{8}d, \quad \frac{1}{16}d, \ldots,$$

то конформность карты τ доказана.

§ 5. ОКРУЖНОСТЬ В ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО

Выясним, как изображается на карте τ окружность плоскости Лобачевского.

Через точку M прямой u проведем евклидову прямую p, перпендикулярную к u, и возьмем на ней в полуплоскости τ

две произвольные точки B и C (рис. 24; $MB > MC$). Построим на p точку A так, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{CM}{AM} = \frac{AM}{BM}. \qquad (6)$$

Из этого равенства заключаем, что гиперболические длины отрезков CA и AB одинаковы. Действительно, преобразо-

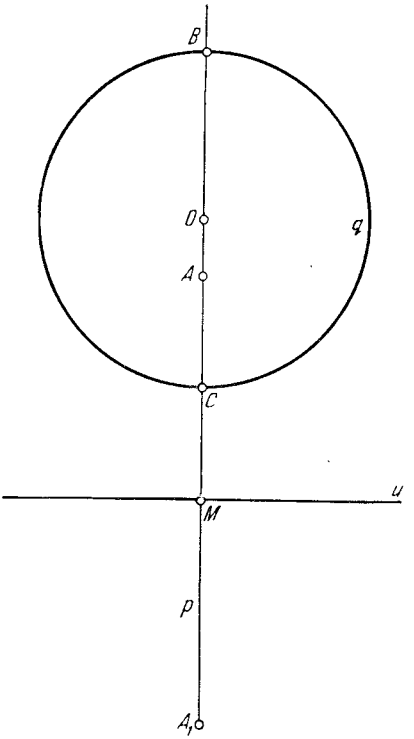

Рис. 24.

вание подобия с центром подобия M и коэффициентом $\frac{CM}{AM}$ переводит отрезок AB в CA [1]).

[1]) $BM \cdot \frac{CM}{AM} = BM \cdot \frac{AM}{BM} = AM$, следовательно, B переходит в A; $AM \cdot \frac{CM}{AM} = CM$, следовательно, A переходит в C.

Обозначим через O евклидову середину отрезка BC, опишем из центра O радиусом OB евклидову окружность q и построим точку A_1, симметричную с A относительно прямой u.

Так как

$$OA = OM - AM, \quad OA_1 = OM + MA_1 = OM + AM,$$

то

$$OA \cdot OA_1 = OM^2 - AM^2. \tag{7}$$

Далее,

$$OM = \frac{1}{2}(BM + CM),$$

а в силу равенства (6)

$$AM^2 = BM \cdot CM.$$

Следовательно, равенству (7) можно придать вид

$$OA \cdot OA_1 = \frac{1}{4}(BM + CM)^2 - BM \cdot CM =$$

$$= \frac{1}{4}(BM^2 + 2BM \cdot CM + CM^2 - 4BM \cdot CM)$$

или

$$OA \cdot OA_1 = \frac{1}{4}(BM - CM)^2. \tag{8}$$

Так как

$$\frac{1}{2}(BM - CM) = OB,$$

то из равенства (8) получаем

$$OA \cdot OA_1 = OB^2.$$

Отсюда видим, что точки A и A_1 симметричны относительно окружности q.

Покажем, что гиперболические расстояния всех точек линии q от точки A равны между собой.

Проведем через A и A_1 произвольную евклидову окружность n (рис. 25). Ее центр N лежит на прямой u, следовательно, ее часть, расположенная в полуплоскости τ, представляет собой гиперболическую прямую.

Пусть n и q пересекаются в точках D и E, n и u — в точках F и G. Опишем радиусом FA из центра F евклидову окружность f. Окружности q и f взаимно ортогональны, так как f проходит через точки A и A_1, симметричные

относительно q (см. § 3); поэтому инверсия относительно f преобразует окружность q в себя.

Далее, та же инверсия преобразует прямую p, не проходящую через полюс инверсии F, в окружность, проходящую через F, а также через точки A и A_1, остающиеся при данной инверсии неподвижными, т. е. в окружность n. С другой стороны, окружность n, проходящая через полюс инверсии, преобразуется в прямую, а именно в p, поскольку эта прямая должна пройти через точки A и A_1.

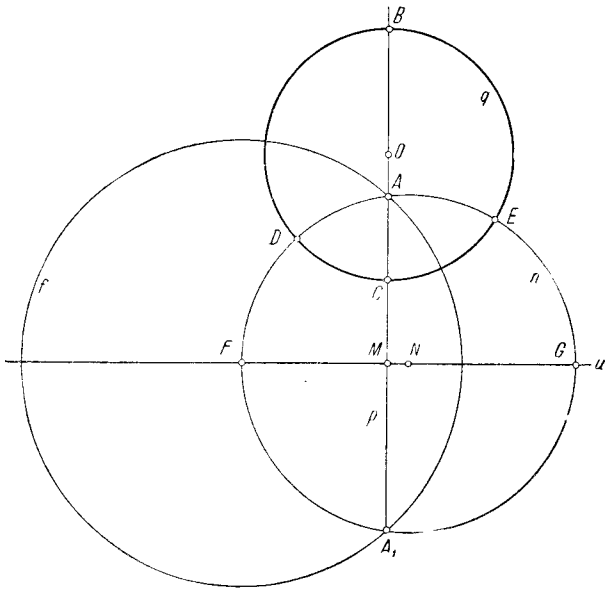

Рис. 25.

Отсюда вытекает, что дуги AD и AE окружности n преобразуются соответственно в отрезки AB и AC прямой p. Следовательно, гиперболические длины отрезков AD и AE гиперболической прямой n равны гиперболическим длинам отрезков AB и AC гиперболической прямой p, иными словами, гиперболические расстояния точек B, C, D, E от точки A одинаковы. Это показывает, что гиперболическая окружность изображается на карте τ в виде евклидовой окружности, не имеющей общих точек с прямой u; однако изображение ее центра (A) не совпадает с центром (O) соответствующей евклидовой окружности.

Заметим в заключение, что каждая гиперболическая прямая, проходящая через A, пересекает окружность q под прямым углом, что аналогично известному свойству диаметров евклидовой окружности.

§ 6. ЭКВИДИСТАНТА

Пусть p и q — перпендикуляр и наклонная к прямой u в некоторой ее точке M, P_1Q_1 и P_2Q_2 — дуги евклидовых окружностей с общим центром M, или, иными словами, отрезки двух гиперболических прямых m_1 и m_2 (рис. 26). Так как m_1 и m_2 пересекают p под прямым углом, то гиперболические длины дуг P_1Q_1 и P_2Q_2 представляют собой гиперболические расстояния точек Q_1 и Q_2 от гиперболической прямой p. Эти гиперболические расстояния равны между собой, поскольку дугу P_1Q_1 можно перевести в дугу P_2Q_2 преобразованием подобия с центром в M.

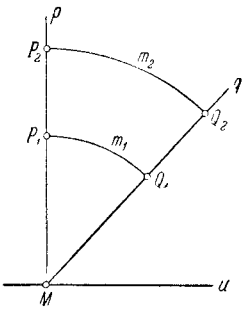

Рис. 26.

Отсюда заключаем, что линия q есть геометрическое место точек, гиперболические расстояния которых от гиперболической прямой p одинаковы. Такая линия называется эквидистантой, гиперболическая прямая p — ее базисом. Эквидистанта, как видно из результатов § 4, не является гиперболической прямой.

Допущение, что геометрическое место точек, находящихся на одном и том же расстоянии от данной прямой и лежащих по одну сторону ее, есть прямая, противоречит указанному свойству эквидистанты, а значит, и аксиоме параллельности Лобачевского; оно равносильно аксиоме параллельности Евклида.

Заметим, что гиперболические прямые, перпендикулярные к базису эквидистанты, пересекают ее под прямым углом, что очевидно из рис. 26.

Инверсия относительно окружности с центром на прямой u, отличным от M, преобразует q в евклидову окружность; она, как и гиперболическая прямая, пересекает прямую u, но центр ее не лежит на u.

Итак, на карте эквидистанта изображается либо в виде евклидовой полупрямой, пересекающей прямую u под острым

или тупым углом, либо в виде дуги евклидовой окружности, пересекающей прямую u, но с центром вне u. Легко убедиться, что не существует эквидистант иного вида.

§ 7. ПРЕДЕЛЬНАЯ ЛИНИЯ

Проведем диаметр p окружности q, перпендикулярный к прямой u, и обозначим через C точку пересечения его с q, ближайшую к u (рис. 27). Если закрепить точку C и неограниченно увеличивать радиус окружности q так, чтобы

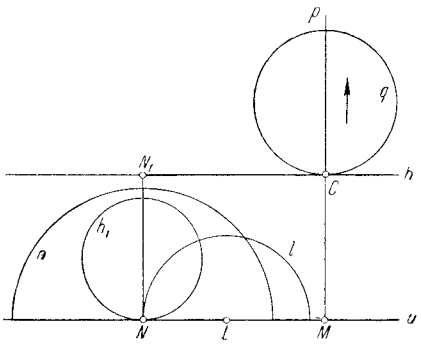

Рис. 27.

ее центр перемещался по прямой p в направлении, указанном стрелкой, то в пределе q превратится в евклидову прямую h, параллельную u.

Линия h не является гиперболической прямой; она называется предельной линией. Таким образом, предельная форма окружности, одна из точек которой и касательная в этой точке закреплены и радиус которой неограниченно возрастает, есть в геометрии Евклида прямая линия, а в геометрии Лобачевского — предельная линия. Этим свойством предельной линии объясняется ее название.

Рассмотрим гиперболическое движение, представляющее собой инверсию относительно окружности n с центром N на прямой u (рис. 27). Оно преобразует линию h в евклидову окружность h_1, проходящую через N, с центром на общем перпендикуляре NN_1 евклидовых прямых u и h, откуда следует, что h_1 касается прямой u.

Итак, предельная линия изображается на карте τ либо в виде евклидовой прямой, параллельной u, либо в виде евклидовой окружности, касающейся u.

Проведем через N евклидову окружность l с центром L на прямой u (рис. 27). Так как радиусы евклидовых окружностей h_1 и l взаимно перпендикулярны, то гиперболическая прямая l пересекает предельную линию h_1 под прямым углом. Отсюда заключаем, что все гиперболические прямые, проходящие через бесконечно удаленную точку предельной линии и называемые ее осями, пересекают эту линию под прямым углом.

Любая предельная линия h гиперболически равна любой иной предельной линии h_1, т. е. существует гиперболическое движение, преобразующее h в h_1. Таким гиперболическим движением будет: преобразование подобия с центром подобия на прямой u, если h и h_1 — евклидовы прямые, параллельные u, или евклидовы окружности разных радиусов, касающиеся u (рис. 28 и 29); сдвиг полуплоскости τ вдоль прямой u, если h и h_1 — евклидовы окружности одного и того же радиуса, касающиеся u; инверсия с полюсом на u, если одна из линий h, h_1 — евклидова прямая, параллельная u, другая — евклидова окружность, касающаяся u.

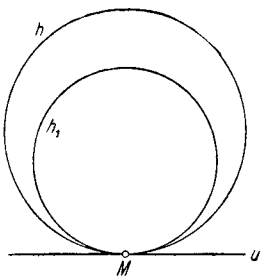

Рис. 28.

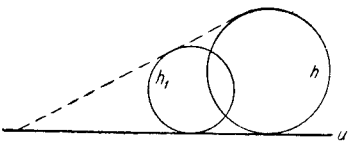

Рис. 29.

§ 8. НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ ГЕОМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО

Теорема 1. *Сумма углов всякого треугольника меньше* $2d$.

Рассмотрим сначала прямоугольный треугольник ABC (рис. 30). Его стороны a, b, c изображены соответственно в виде отрезка евклидова перпендикуляра к прямой u, дуги евклидовой окружности с центром M и дуги евклидовой окружности с центром N. Угол C — прямой. Угол A равен углу между касательными к окружностям b и c в точке A, или, что то же, углу между радиусами NA и MA этих окружностей. Наконец, $\angle B = \angle BNM$.

Построим на отрезке BN как на диаметре евклидову окружность q; она имеет с окружностью c одну только общую точку B, так как ее диаметр является радиусом

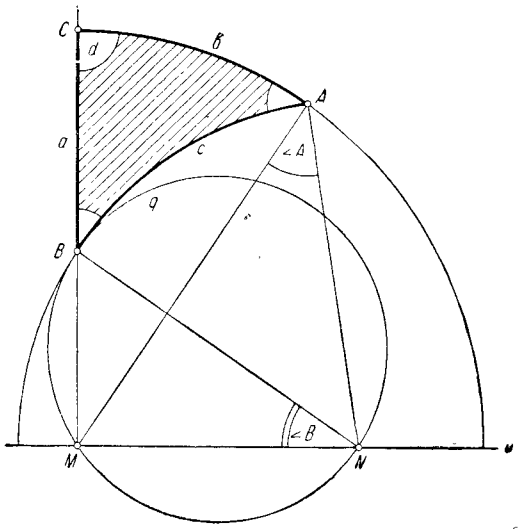

Рис. 30.

окружности c. Поэтому точка A лежит вне круга, ограниченного окружностью q, следовательно,

$$\angle A = \angle MAN < \angle MBN.$$

Отсюда в силу равенства $\angle MBN + \angle B = d$ имеем:

$$\angle A + \angle B < d; \qquad (9)$$

поэтому $\angle A + \angle B + \angle C < 2d$, что и требовалось доказать.

Заметим, что с помощью надлежащего гиперболического движения любой прямоугольный треугольник можно расположить так, чтобы один из его катетов лежал на евклидовом перпендикуляре к прямой u; следовательно, использованный нами метод вывода неравенства (9) применим к любому прямоугольному треугольнику.

Если дан косоугольный треугольник, то разбиваем его одной из высот на два прямоугольных треугольника. Сумма

острых углов этих прямоугольных треугольников равна сумме углов данного косоугольного треугольника. Отсюда, принимая во внимание неравенство (9), заключаем, что теорема справедлива для любого треугольника.

Теорема 2. *Сумма углов четырехугольника меньше* $4d$.

Для доказательства достаточно разбить четырехугольник диагональю на два треугольника.

Теорема 3. *Две расходящиеся прямые имеют один и только один общий перпендикуляр.*

Пусть одна из данных расходящихся прямых изображается на карте τ в виде евклидова перпендикуляра p к прямой u в точке M, другая — в виде евклидовой полуокружности q с центром на u, причем p и q не имеют общих точек (рис. 31). Такое расположение двух расходящихся гиперболических прямых на карте τ всегда может быть достигнуто с помощью надлежащего гиперболического движения.

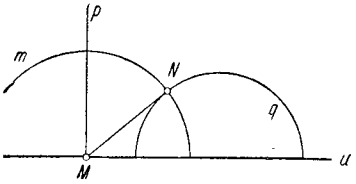

Рис. 31.

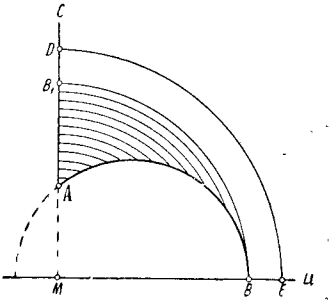

Рис. 32.

Проведем из M евклидову касательную MN к q и опишем из центра M радиусом MN евклидову полуокружность m. Ясно, что m — гиперболическая прямая, пересекающая и p и q под прямым углом. Следовательно, m изображает на карте τ искомый общий перпендикуляр данных расходящихся прямых.

Две расходящиеся прямые не могут иметь двух общих перпендикуляров, так как в этом случае существовал бы четырехугольник с четырьмя прямыми углами, что противоречит теореме 2.

Теорема 4. *Прямоугольная проекция стороны острого угла на другую его сторону есть отрезок* (а не полупрямая, как в геометрии Евклида).

Справедливость теоремы очевидна из рис. 32, где отрезок AB_1 есть прямоугольная проекция стороны AB острого угла BAC на его сторону AC.

На том же рисунке дуга DE евклидовой окружности с центром M есть перпендикуляр к гиперболической прямой AC. Этот перпендикуляр не пересекается с наклонной AB. Следовательно, допущение, что перпендикуляр и наклонная к одной и той же прямой всегда пересекаются, противоречит аксиоме параллельности Лобачевского; оно равносильно аксиоме параллельности Евклида.

Теорема 5. *Если три угла треугольника ABC равны соответственно трем углам треугольника $A'B'C'$, то эти треугольники равны.*

Допустим обратное и отложим соответственно на лучах AB и AC отрезки $AB_1 = A'B'$, $AC_1 = A'C'$. Очевидно, треугольники AB_1C_1 и $A'B'C'$ равны по двум сторонам и заключенному между ними углу. Точка B_1 не совпадает с B, точка C_1 не совпадает с C, так как в любом из этих случаев имело бы место равенство данных треугольников, что противоречит допущению.

Рассмотрим следующие возможности.

а) Точка B_1 лежит между A и B, точка C_1 — между A и C (рис. 33; на этом и следующем рисунке гиперболические прямые изображены условно в виде евклидовых прямых). Нетрудно убедиться, что сумма углов четырехугольника BCC_1B_1 равна $4d$, что невозможно в силу теоремы 2.

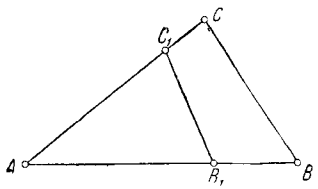

Рис. 33.

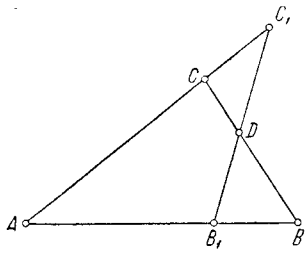

Рис. 34.

б) Точка B_1 лежит между A и B, точка C — между A и C_1 (рис. 34). Обозначим через D точку пересечения отрезков BC и B_1C_1. Так как $\angle C = \angle C'$ и $\angle C' = \angle C_1$, то $\angle C = \angle C_1$, что невозможно, поскольку угол C — внешний относительно треугольника CC_1D [1]).

---

[1]) Доказательство теоремы «*Внешний угол треугольника больше внутреннего, не смежного с ним*» не зависит от аксиомы параллельности.

Аналогично трактуются и другие возможные случаи.

Теорема доказана, поскольку сделанное нами допущение привело к противоречию.

Из теоремы 5 вытекает, что в геометрии Лобачевского не существует треугольника, подобного данному треугольнику, но не равного ему.

§ 9. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Из рассмотрения карты τ можно сделать ряд важных выводов.

Во-первых, каждая теорема геометрии Лобачевского приводится на карте τ к некоторой теореме геометрии Евклида. Поэтому наличие противоречия в геометрии Лобачевского влекло бы за собой противоречие в евклидовой геометрии. Следовательно, геометрия Лобачевского непротиворечива.

Во-вторых, знакомство с геометрией Лобачевского чрезвычайно облегчает вскрытие ошибок в попытках доказать аксиому параллельности Евклида, сводящихся в большинстве случаев к принятию допущения, равносильного этой аксиоме. Чтобы убедиться в необоснованности допущения, достаточно показать, что оно противоречит аксиоме параллельности Лобачевского. Так мы и поступили в трех рассмотренных выше примерах (о геометрическом месте точек, равноудаленных от прямой, о пересечении перпендикуляра и наклонной к данной прямой, о существовании подобных, но не равных треугольников).

Приведем еще один пример. Математик прошлого века Фаркаш Больаи (отец упоминавшегося выше Яноша Больаи) предложил доказательство аксиомы параллельности Евклида, основанное на допущении, что через три точки, не лежащие на одной прямой, всегда можно провести окружность. Ф. Больаи считал этот факт очевидным, но он не имеет места в геометрии Лобачевского, так как через три точки плоскости Лобачевского, не лежащие на одной прямой, проходит либо окружность, либо предельная линия, либо эквидистанта, следовательно, через такие три точки не всегда можно провести окружность. Отсюда видим, что допущение Ф. Больаи равносильно евклидовой аксиоме параллельности, что свидетельствует о несостоятельности его доказательства.

Лобачевский в своих исследованиях не пользовался методом построения карт гиперболической плоскости; этот метод

был впервые предложен итальянским математиком Евгением Бельтрами (1835—1900) в его работе, вышедшей из печати в 1868 году, спустя 12 лет после смерти великого русского геометра.

Карта плоскости Лобачевского, рассмотренная в нашей книжке, значительно отличающаяся от карты, построенной Бельтрами, была введена в науку французским ученым Анри Пуанкаре (1854—1912).

§ 10. О НАТУРАЛЬНЫХ ЛОГАРИФМАХ И ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ

Изложенный ниже материал будет использован в последующих параграфах [1]).

Установим предварительно несколько важных соотношений.

Введем обозначения:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, \tag{10}$$

где n — целое положительное число. Очевидно,

$$a_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}, \quad b_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2}. \tag{11}$$

Из равенств (10) и (11) получаем:

$$b_n - a_n = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{a_n}{n}, \tag{12}$$

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{n+1}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \tag{13}$$

и

$$b_n - a_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Разлагая правую часть последнего равенства на множители, получим

$$\frac{1}{n(n+1)}\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) + \dots\right.$$
$$\left. \dots + \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n-1} + \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n\right]. \tag{14}$$

---

[1]) Затронутые здесь вопросы более подробно освещены в книгах: А. И. Маркушевич, Площади и логарифмы и В. Г. Шервatов, Гиперболические функции (серия «Популярные лекции по математике», выпуски 9 и 16).

Заменяя в квадратных скобках каждый сомножитель $1+\frac{1}{n+1}$ на $1+\frac{1}{n}$, мы увеличим выражение (14), что после упрощений приведет к неравенству

$$b_n - a_{n+1} < \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Отсюда в силу равенства (12) будем иметь

$$b_n - a_{n+1} < b_n - a_n,$$

или

$$a_{n+1} > a_n.$$

Следовательно, величина a_n возрастает с возрастанием числа n.

Заменим теперь в квадратных скобках выражения (14) каждый сомножитель $1+\frac{1}{n}$ на $1+\frac{1}{n+1}$. В результате выражение (14) уменьшится, что после упрощений приведет к неравенству

$$b_n - a_{n+1} > \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n. \qquad (15)$$

Нетрудно убедиться, что

$$\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n > \frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}; \qquad (16)$$

действительно, после упрощений отсюда получим:

$$\frac{1}{n} > \frac{n+2}{(n+1)^2},$$

или

$$(n+1)^2 > n(n+2).$$

Справедливость последнего неравенства очевидна.

Из (15), (16) и (13) получаем

$$b_n - a_{n+1} > b_{n+1} - a_{n+1}.$$

Следовательно,

$$b_n > b_{n+1}.$$

Итак, величина b_n убывает с возрастанием числа n.

Так как $a_1 = 2$, $b_1 = 4$, то из предыдущего заключаем, что

$$2 \leqslant a_n < b_n \leqslant 4.$$

Отсюда и из (12) вытекает неравенство

$$b_n - a_n < \frac{4}{n}. \tag{17}$$

Поскольку при возрастании числа n a_n возрастает, b_n убывает и разность $b_n - a_n$ стремится к нулю, что следует из (17), то величины a_n и b_n стремятся к одному и тому же пределу, который принято обозначать буквой e, причем первая всегда меньше, вторая всегда больше этого предела. Итак,

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}, \tag{18}$$

и

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}. \tag{19}$$

В частности, при $n = 1$ имеем

$$2 < e < 4. \tag{20}$$

Число e — иррациональное; его приближенное значение равно 2,71828.

Из неравенств (19) вытекает приближенное равенство

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \approx e; \tag{21}$$

его погрешность меньше разности $b_n - a_n$ и, следовательно, меньше $\frac{4}{n}$.

Пусть x — правильная положительная рациональная дробь. Будем придавать целому положительному числу n такие значения, чтобы число $nx = k$ было целым. В силу неравенств (19) получим

$$\left(1+\frac{x}{k}\right)^k < e^x < \left(1+\frac{x}{k}\right)^{k+x}.$$

Следовательно, будет иметь место приближенное равенство

$$\left(1+\frac{x}{k}\right)^k \approx e^x. \tag{22}$$

Его погрешность меньше, чем

$$\left(1+\frac{x}{k}\right)^{k+x} - \left(1+\frac{x}{k}\right)^k = \left(1+\frac{x}{k}\right)^k\left[\left(1+\frac{x}{k}\right)^x - 1\right] < \frac{xe^x}{k}. \tag{23}$$

Далее, по формуле бинома Ньютона имеем

$$\left(1+\frac{x}{k}\right)^k = 1 + x + \frac{k(k-1)}{2k^2}x^2 + \\ + \frac{k(k-1)(k-2)}{6k^3}x^3 + \ldots + \frac{1}{k^k}x^k. \quad (24)$$

Отсюда вытекает приближенное равенство

$$\left(1+\frac{x}{k}\right)^k \approx 1 + x. \quad (25)$$

Обозначим его погрешность через σ. Очевидно,

$$= \frac{x^2}{2}\left[\frac{k-1}{k} + \frac{(k-1)(k-2)}{3k^2}x + \ldots + \frac{2}{k^k}x^{k-2}\right] < \\ < \frac{x^2}{2}(1 + x + x^2 + \ldots) = \frac{x^2}{2(1-x)}. \quad (26)$$

Из (22), (25) и (26) заключаем, что

$$e^x \approx 1 + x \quad (27)$$

и погрешность этого соотношения не превышает $\frac{x^2}{2(1-x)}$, так как предел выражения $\frac{xe^x}{k}$ [см. (23)] равен нулю, когда k неограниченно возрастает. Эта погрешность может быть сделана сколь угодно малой, если величине x придавать достаточно малые значения.

Формула (27) справедлива и в том случае, когда $x < 1$ — положительное иррациональное число, в чем можно убедиться, рассматривая его рациональные приближенные значения.

Заметим, что формула (27) справедлива и для отрицательных значений x, меньших по абсолютной величине единицы; в этом случае ее погрешность не превышает $\frac{x^2}{2(1+x)}$.

Из (22) и (24) можно получить еще одно приближенное равенство, более точное, чем (27). Так как $k \to \infty$, то

предел третьего члена правой части равенства (24) равен $\frac{1}{2}x^2$. Следовательно, можно положить

$$e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2. \tag{28}$$

Этой формулой пользуются, если x настолько мало, что величиной x^3 можно пренебречь. Оценку погрешности формулы (28) производить не будем.

Рассмотрим систему логарифмов с основанием e. Такие логарифмы называются натуральными; в высшей математике они играют весьма важную роль.

Натуральный логарифм числа x обозначается так: $\ln x$. В силу известных свойств логарифмов $\ln 1 = 0$, $\ln e = 1$.

Логарифмируя обе части соотношения (27), получим следующее приближенное равенство:

$$\ln(1 + x) \approx x; \tag{29}$$

им можно пользоваться, если величина x достаточно мала.

С помощью числа e определяются гиперболические функции — гиперболический синус и гиперболический косинус (обозначения: sh и ch):

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}. \tag{30}$$

Две другие гиперболические функции — гиперболический тангенс и гиперболический котангенс (обозначения: th и cth) — могут быть определены так:

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \quad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}. \tag{31}$$

Гиперболические функции обладают рядом свойств, аналогичных свойствам одноименных тригонометрических функций. За подробностями отсылаем читателя к упомянутой выше книге В. Г. Шерватова.

Для достаточно малых значений величины x получим из (27), (30) и (31) следующие приближенные равенства:

$$\operatorname{sh} x \approx x, \quad \operatorname{ch} x \approx 1, \quad \operatorname{th} x \approx x, \tag{32}$$

а из (28), (30) и (31) — приближенные равенства:

$$\operatorname{sh} x \approx x, \quad \operatorname{ch} x \approx 1 + \frac{1}{2}x^2, \quad \operatorname{th} x \approx \frac{2x}{2 + x^2}. \tag{33}$$

§ 11. ИЗМЕРЕНИЕ ОТРЕЗКОВ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ПРЯМЫХ

В этом параграфе будет показано, как вычисляются гиперболические длины отрезков гиперболических прямых.

Рассмотрим сначала евклидову полупрямую полуплоскости τ, перпендикулярную к прямой u в ее точке M (рис. 35), и на ней точки A, B, C, D, расположенные так, что

$$\frac{MB}{MA} = \frac{MD}{MC},$$

или, что то же,

$$\frac{MB}{MD} = \frac{MA}{MC}.$$

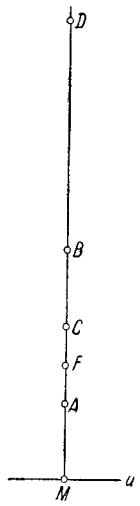

Рис. 35.

Обозначая каждое из двух последних соотношений через μ, замечаем, что преобразование подобия с центром M и коэффициентом μ переводит отрезок CD в отрезок AB, следовательно, гиперболические длины этих отрезков равны между собой.

Из сказанного вытекает, что гиперболическая длина отрезка AB (будем обозначать ее через AB_Γ) характеризуется отношением $\frac{MB}{MA}$, или, иными словами, есть некоторая функция этого отношения. Покажем, что за эту функцию можно принять логарифм, т. е. можно положить

$$AB_\Gamma = \log \frac{MB}{MA}. \tag{34}$$

Пусть F — точка отрезка AB. Тогда

$$\frac{MB}{MA} = \frac{MF}{MA} \cdot \frac{MB}{MF}.$$

Логарифмируя это равенство, получим в силу формулы (34)

$$AB_\Gamma = AF_\Gamma + FB_\Gamma,$$

что соответствует правилу сложения отрезков.

Вообще говоря, в формуле (34) можно брать логарифм с любым — но для всех отрезков одним и тем же — положительным основанием (отличным от 1); однако для согласования выводимого нами правила с положениями параграфа 4

необходимо остановить выбор на натуральном логарифме и, следовательно, писать формулу (34) в виде

$$AB_{\text{г}} = \ln \frac{MB}{MA}. \tag{35}$$

Действительно, если отрезок AB достаточно мал по сравнению с отрезком MA, то из соотношений

$$\ln \frac{MB}{MA} = \ln \frac{MA + AB}{MA} = \ln \left(1 + \frac{AB}{MA}\right)$$

получим в силу формул (29) и (35)

$$AB_{\text{г}} \approx \frac{AB}{MA},$$

что соответствует принципу, принятому в параграфе 4.

Заметим, что гиперболические длины отрезков AB и BA, вычисленные по формуле (35), равны по абсолютной величине, но отличаются знаком. Это показывает, что при изменении направления отрезка на обратное его гиперболическая длина меняет знак. Если направление отрезка для нас

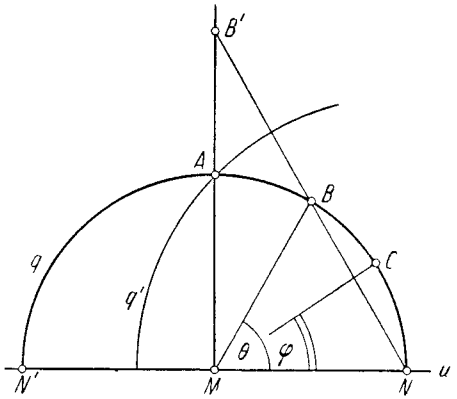

Рис. 36.

безразлично, то в правой части формулы (35) следует брать абсолютную величину логарифма.

Рассмотрим теперь евклидову полуокружность q с центром M на прямой u, пересекающую u в точках N' и N, и евклидов перпендикуляр к u в точке M, пересекающий q в точке A (рис. 36).

Пусть B — точка дуги AN. Проведем евклидову прямую NB и обозначим через B' ее пересечение с MA. Нетрудно убедиться в равенстве отрезков AB и AB' гиперболических прямых q и MA. Действительно, инверсия относительно окружности q' радиуса NA с центром N преобразует q в евклидову прямую MA; при этом точка A преобразуется в себя, а точка B — в B', так как B и B' лежат на евклидовой прямой, проходящей через полюс инверсии N. Следовательно,

$$AB_{\text{г}} = AB'_{\text{г}} = \ln \frac{MB'}{MA}.$$

Обозначим угол NMB через θ; тогда $\angle MNB = 90° - \frac{\theta}{2}$ и

$$\frac{MB'}{MA} = \frac{MB'}{MN} = \operatorname{tg}\left(90° - \frac{\theta}{2}\right) = \operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}.$$

Отсюда

$$AB_{\text{г}} = \ln \operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}. \tag{36}$$

Если C — точка дуги BN (рис. 36) и $\angle NMC = \varphi$, то, как следует из (36),

$$AC_{\text{г}} = \ln \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}, \quad BC_{\text{г}} = AC_{\text{г}} - AB_{\text{г}} = \ln \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} - \ln \operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}.$$

Отсюда

$$BC_{\text{г}} = \ln\left(\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right). \tag{37}$$

Итак, нами получены формулы как для случая, когда гиперболическая прямая, содержащая данный отрезок, изображается евклидовой полупрямой, так и для случая, когда она изображается евклидовой полуокружностью.

§ 12. ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ТРИГОНОМЕТРИИ

Рассмотрим в полуплоскости τ прямоугольный треугольник ABC (рис. 37). Его сторона BC — отрезок евклидовой прямой OB ($OB \perp u$), сторона CA — дуга евклидовой окружности радиуса l с центром O, сторона AB — дуга евклидовой окружности радиуса l с центром M, $\angle C$ — прямой, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$.

Опустим из точки A перпендикуляр AN на прямую u и введем обозначения:

$$OB=p,\ NA=q,\ MO=m,\ MN=n,\ \angle NMA=\theta,\ \angle NOA=\varphi.$$

Обозначим *гиперболические* длины сторон BC, CA, AB — данного треугольника соответственно через a, b, c. (Наоборот, l, m, n, p, q — *евклидовы* длины.)

Заметим, что

$$\angle OAM=\alpha,\quad \angle OMB=\beta,$$

так как касательные в точке A к сторонам угла A перпендикулярны к сторонам угла OAM, а касательные в точке B — к сторонам угла B перпендикулярны к сторонам угла OMB.

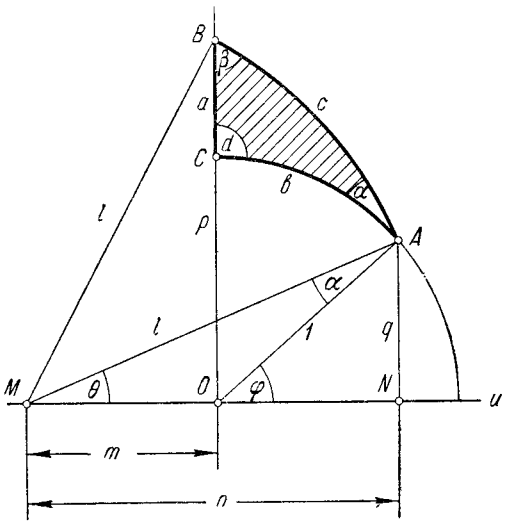

Рис. 37.

Установим теперь ряд зависимостей между рассматриваемыми величинами.

Из треугольников OBM и OAM имеем:

$$p^2=l^2-m^2,$$

$$1=l^2+m^2-2mn\ (=OA^2).$$

Отсюда

$$p^2-1=2m(n-m),\quad p^2+1=2(l^2-mn). \qquad (38)$$

Далее, в силу формулы (35)

$$a = \ln \frac{p}{1} = \ln p.$$

Следовательно,

$$e^a = p, \quad e^{-a} = \frac{1}{p},$$

$$\operatorname{sh} a = \frac{1}{2}(e^a - e^{-a}) = \frac{1}{2}\left(p - \frac{1}{p}\right) = \frac{p^2 - 1}{2p},$$

$$\operatorname{ch} a = \frac{1}{2}(e^a + e^{-a}) = \frac{1}{2}\left(p + \frac{1}{p}\right) = \frac{p^2 + 1}{2p}.$$

Отсюда, воспользовавшись равенствами (38), получим:

$$\operatorname{sh} a = \frac{m(n-m)}{p}, \quad \operatorname{ch} a = \frac{l^2 - mn}{p}. \tag{39}$$

Из треугольника OAN имеем:

$$\sin \varphi = q, \quad \cos \varphi = n - m. \tag{40}$$

Следовательно,

$$\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} = \frac{1 + \cos \varphi}{\sin \varphi} = \frac{1 + n - m}{q},$$

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi} = \frac{1 - n + m}{q}.$$

Так как в силу (36)

$$b = \ln \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2},$$

то

$$e^b = \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} = \frac{1 + n - m}{q}, \quad e^{-b} = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{1 - n + m}{q}.$$

Отсюда

$$\operatorname{sh} b = \frac{n - m}{q}, \quad \operatorname{ch} b = \frac{1}{q}. \tag{41}$$

Далее, из треугольников OBM и OAN находим:

$$\sin \theta = \frac{q}{l}, \quad \cos \theta = \frac{n}{l}, \tag{42}$$

$$\sin \beta = \frac{p}{l}, \quad \cos \beta = \frac{m}{l}. \tag{43}$$

Отсюда

$$\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}=\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{l+n}{q},\quad \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{l-n}{q},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{1-\cos\beta}{\sin\beta}=\frac{l-m}{p},\quad \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}=\frac{1+\cos\beta}{\sin\beta}=\frac{l+m}{p}.$$

Так как в силу (37)

$$c=\left(\ln\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right),$$

то

$$e^{c}=\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{(l+n)(l-m)}{pq}=\frac{l^2+ln-lm-mn}{pq},$$

$$e^{-c}=\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}=\frac{(l-n)(l+m)}{pq}=\frac{l^2-ln+lm-mn}{pq}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{sh}c=\frac{l(n-m)}{pq},\quad \operatorname{ch}c=\frac{l^2-mn}{pq}. \tag{44}$$

Наконец, из треугольника OAM получаем

$$\alpha=\varphi-\theta.$$

Отсюда, принимая во внимание (40) и (42), будем иметь:

$$\sin\alpha=\sin\varphi\cos\theta-\cos\varphi\sin\theta=\frac{qn-q(n-m)}{l},$$

$$\cos\alpha=\cos\varphi\cos\theta+\sin\varphi\sin\theta=\frac{n(n-m)+q^2}{l}=$$

$$=\frac{n(n-m)+l^2-n^2}{l},$$

поскольку $q^2=l^2-n^2$. Итак,

$$\sin\alpha=\frac{qm}{l},\quad \cos\alpha=\frac{l^2-mn}{l}. \tag{45}$$

Из (39), (41), (43), (44) и (45) получим:

$$\operatorname{th}a=\frac{m(n-m)}{l^2-mn},\quad \operatorname{th}b=n-m,\quad \operatorname{th}c=\frac{l(n-m)}{l^2-mn}, \tag{46}$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{qm}{l^2-mn},\quad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{l^2-mn}{qm}, \tag{47}$$

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{p}{m},\quad \operatorname{ctg}\beta=\frac{m}{p}. \tag{48}$$

С помощью равенств (39), (41), (43)—(48) нетрудно проверить справедливость следующих формул, являющихся

основными формулами гиперболической тригонометрии:

$$\operatorname{ch} c = \operatorname{ch} a \cdot \operatorname{ch} b, \tag{49}$$

$$\operatorname{sh} a = \operatorname{sh} c \cdot \sin \alpha, \tag{50}$$

$$\operatorname{sh} b = \operatorname{sh} c \cdot \sin \beta, \tag{51}$$

$$\operatorname{th} a = \operatorname{sh} b \cdot \operatorname{tg} \alpha, \tag{52}$$

$$\operatorname{th} b = \operatorname{sh} a \cdot \operatorname{tg} \beta, \tag{53}$$

$$\operatorname{th} a = \operatorname{th} c \cdot \cos \beta, \tag{54}$$

$$\operatorname{th} b = \operatorname{th} c \cdot \cos \alpha, \tag{55}$$

$$\cos \alpha = \operatorname{ch} a \cdot \sin \beta, \tag{56}$$

$$\cos \beta = \operatorname{ch} b \cdot \sin \alpha, \tag{57}$$

$$\operatorname{ch} c = \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta. \tag{58}$$

Формулам (49) — (58) можно придать более общий вид, если заменить в них величины a, b, c соответственно на $\frac{a}{r}$, $\frac{b}{r}$, $\frac{c}{r}$, что равносильно изменению масштаба гиперболических длин. Здесь r — постоянная, общая для всех отрезков.

Характерно, что при достаточно малых значениях величин a, b, c из полученных нами зависимостей между элементами прямоугольного треугольника вытекают приближенные равенства, аналогичные формулам евклидовой тригонометрии. Например, воспользовавшись соотношениями (32) и (33), получим из (50), (52) и (54):

$$a \approx c \sin \alpha,$$

$$a \approx b \operatorname{tg} \alpha,$$

$$a \approx c \cos \beta,$$

а формуле (49) придадим вид

$$1 + \frac{1}{2} c^2 \approx \left(1 + \frac{1}{2} a^2\right)\left(1 + \frac{1}{2} b^2\right),$$

откуда

$$\frac{1}{2} c^2 \approx \frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{2} b^2 + \frac{1}{4} a^2 b^2;$$

пренебрегая последним слагаемым правой части по причине его малости, получим после упрощений

$$c^2 \approx a^2 + b^2.$$

Таким образом, формула (49) соответствует теореме Пифагора евклидовой геометрии.

§ 13. ДЛИНЫ НЕКОТОРЫХ ПЛОСКИХ КРИВЫХ ГЕОМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО

Длина дуги предельной линии. На рис. 38 дуга ADB евклидовой окружности с центром O на прямой u изображает отрезок гиперболической прямой, а евклидов отрезок AB, параллельный u, — дугу предельной линии.

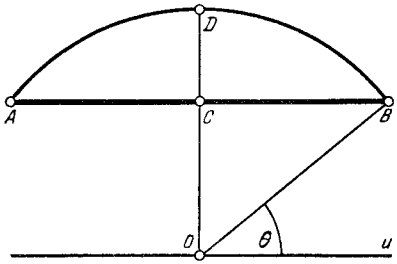

Рис. 38.

Обозначим их гиперболические длины соответственно через $2a$ и $2s$.

Воспользовавшись формулой (36), получим $a = \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}$; отсюда $\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} = e^a$. Далее, применение принципа 1° параграфа 4 дает:

$$s = \frac{AC}{OC} = \operatorname{ctg} \theta = \frac{1}{2}\left(\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} - \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{2}(e^a - e^{-a}).$$

Отсюда в силу определения гиперболического синуса получим

$$s = \operatorname{sh} a; \tag{59}$$

следовательно, $2s = 2 \operatorname{sh} a$. Таким образом, длина дуги предельной линии равна удвоенному гиперболическому синусу половины хорды, стягивающей эту дугу.

Поскольку $a < s$, то из (59) будем иметь

$$a < \operatorname{sh} a \quad (\text{если } a > 0). \tag{60}$$

Длина окружности. Докажем предварительно два вспомогательных предложения.

а) Если a — достаточно малая положительная величина, то $\operatorname{th} a < a$ [1]). Действительно, из (33) имеем

$$\operatorname{th} a \approx \frac{2a}{2+a^2} < a \quad (\text{если } a > 0).$$

б) Принимая во внимание, что периметры вписанного в евклидову окружность радиуса 1 и описанного около нее правильных n-угольников стремятся при неограниченном возрастании числа n к одному и тому же пределу, равному длине этой окружности, получим

$$\lim_{n\to\infty} 2n \sin\frac{2d}{n} = \lim_{n\to\infty} 2n \operatorname{tg}\frac{2d}{n} = 2\pi. \tag{61}$$

Найдем теперь длину s гиперболической окружности радиуса R. (Здесь и дальше все обозначения относятся к гиперболическим длинам.) Пусть AB и CD — стороны вписанного в эту окружность и описанного около нее правильных n-угольников [2]); обозначим их периметры через p и P, а длины отрезков AC и EF — через ρ и ρ' (см. рис. 39; на нем гиперболические фигуры изображены условно в виде евклидовых фигур).

Из прямоугольных треугольников OAE и OCF, где O — центр данной окружности, получим в силу формул (52) и (50):

$$\operatorname{th} AE = \operatorname{sh} OE \cdot \operatorname{tg}\frac{2d}{n},$$

$$\operatorname{sh} CF = \operatorname{sh} OC \cdot \sin\frac{2d}{n},$$

или

$$\operatorname{th}\frac{p}{2n} = \operatorname{sh}(R-\rho') \cdot \operatorname{tg}\frac{2d}{n}, \tag{62}$$

$$\operatorname{sh}\frac{P}{2n} = \operatorname{sh}(R+\rho) \cdot \sin\frac{2d}{n}. \tag{63}$$

---

[1]) Отметим без доказательства, что это неравенство справедливо при всяком положительном значении величины a.

[2]) Пусть A — точка гиперболической окружности q с центром O. Построим угол $AOM = \frac{2d}{m}$, где m — данное целое положительное число, и проведем в точке A касательную к окружности q. Эта касательная и полупрямая OM либо пересекутся в некоторой точке B, либо не пересекутся. В первом случае отрезок AB будет половиной стороны правильного m-угольника, описанного около окружности q. Во втором случае около q нельзя описать правильный m-угольник, но можно описать правильный n-угольник, если целое число n, большее m, достаточно велико.

Пусть число n настолько велико, что $\operatorname{th}\frac{p}{2n} < \frac{p}{2n}$; так как $\frac{P}{2n} < \operatorname{sh}\frac{P}{2n}$ в силу неравенства (60), то из формул (62) и (63), умножая их почленно на $2n$, будем иметь:

$$\operatorname{sh}(R-\rho')\cdot 2n\operatorname{tg}\frac{2d}{n} < p < s < P < \operatorname{sh}(R+\rho)\cdot 2n\sin\frac{2d}{n}. \quad (64)$$

Принимая во внимание равенства (61) и учитывая, что ρ и ρ' стремятся к нулю, когда n неограниченно возрастает,

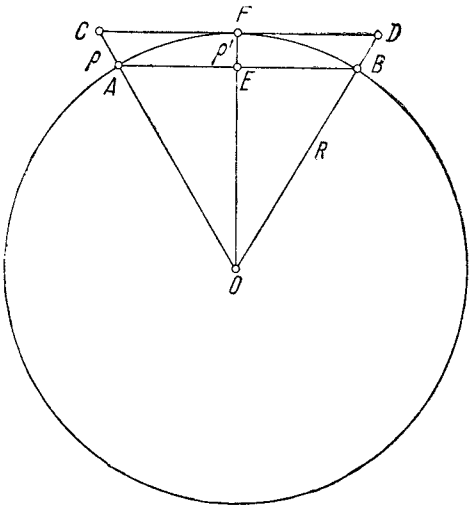

Рис. 39.

приходим к выводу, что первый и последний члены в цепи неравенств (64) стремятся к одному и тому же пределу $2\pi\operatorname{sh}R$, совпадающему с величиной s:

$$s = 2\pi\operatorname{sh}R.$$

Итак, в геометрии Лобачевского длина окружности равна гиперболическому синусу ее радиуса, помноженному на 2π.

Длина дуги эквидистанты. Пусть точки P_1, P_2, ..., P_{n-1}, находящиеся на евклидовых расстояниях y_1, y_2, ..., y_{n-1} от прямой u, делят отрезок AB на n евклидово равных частей и пусть евклидовы длины отрезков OB и AB равны соответственно y_n и ζ (рис. 40; $OB \perp u$). Рас-

смотрим дуги AA', P_1P_1', ..., BB' евклидовых окружностей с общим центром O, изображающие перпендикуляры, опущенные из точек эквидистанты OB' на ее базис OB. Гиперболическая длина h каждого из этих перпендикуляров определяется согласно формуле (36) равенством $h = \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}$.

Обозначим гиперболические длины дуги $A'B'$ данной эквидистанты и отрезка AB ее базиса через s и a. Так как

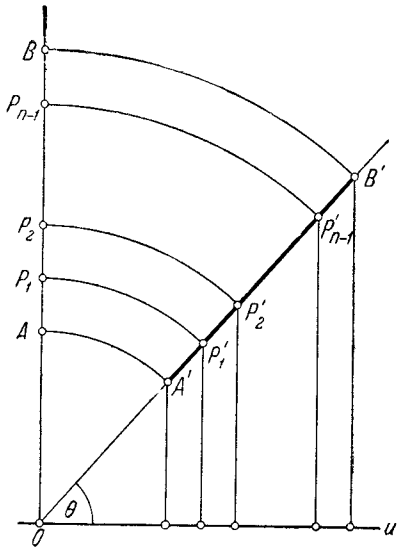

Рис. 40.

евклидовы расстояния точек P_1', P_2', ..., B' от прямой u равны соответственно $y_1 \sin\theta$, $y_2 \sin\theta$, ..., $y_n \sin\theta$, а евклидова длина каждой из частей, на которые поделены отрезки AB и $A'B'$, равна $\frac{\zeta}{n}$, то в силу выводов § 4 будем иметь: $a = \lim\limits_{n\to\infty} Z$, $s = \lim\limits_{n\to\infty} Z'$, где

$$Z = \frac{\zeta}{n}\left(\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \ldots + \frac{1}{y_n}\right),$$

$$Z' = \frac{\zeta}{n}\left(\frac{1}{y_1 \sin\theta} + \frac{1}{y_2 \sin\theta} + \ldots + \frac{1}{y_n \sin\theta}\right).$$

Отсюда

$$\frac{Z'}{Z} = \frac{1}{\sin\theta}.$$

Поскольку отношение величин Z′ и Z сохраняет постоянное значение, то то же значение будет иметь отношение их пределов:

$$\frac{s}{a} = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{h} + e^{-h}\right) = \operatorname{ch} h\,.$$

Следовательно,

$$s = a \operatorname{ch} h.$$

Итак, длина дуги эквидистанты равна прямоугольной проекции этой дуги на базис эквидистанты, помноженной на гиперболический косинус расстояния ее точек от базиса.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключительных строках нашей книжки мы ознакомим читателя, не приводя доказательств, с некоторыми предложениями геометрии Лобачевского, оттеняющими ее своеобразие.

Расскажем прежде всего об одной поверхности евклидова пространства, о которой мы упомянули вскользь в § 2.

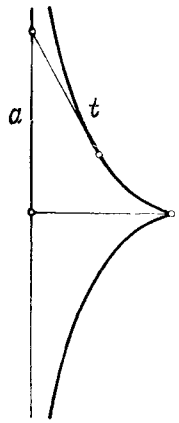

Рис. 41.

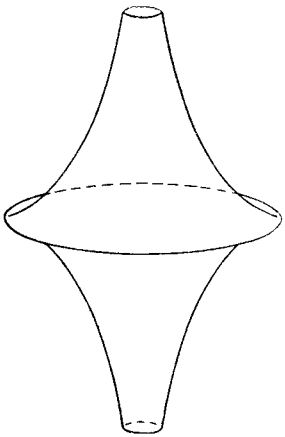

Рис. 42.

На рис. 41 изображена евклидова плоскость, в ней — прямая a и связанная с a кривая t (трактриса), обладающая следующим свойством: отрезок касательной к t в любой ее точке, заключенный между точкой касания и точкой пересечения касательной с прямой a, имеет постоянную длину, не зависящую от выбора точки касания.

Если трактрису t вращать вокруг прямой a, то она опишет поверхность, называемую псевдосферой (рис. 42).

Псевдосфера и есть та поверхность, которую исследовал Бельтрами, доказавший, что она характеризуется свойствами, присущими куску плоскости Лобачевского (если считать «прямыми» кратчайшие линии на ней).

Подобно этому в пространстве Лобачевского существует поверхность, на которой выполняются (при той же трактовке понятия «прямая») плоскостные положения евклидовой геометрии; это — так называемая предельная поверхность; ее описывает предельная линия, вращаясь вокруг одной из своих осей.

Приведем теперь формулировки некоторых наиболее простых предложений, характерных для геометрии Лобачевского.

1. Две параллельные прямые асимптотически сближаются в направлении их параллельности (т. е. расстояние точки одной из этих прямых от другой может быть сделано сколь угодно малым) и неограниченно расходятся в противоположном направлении.

2. Пусть прямая c пересекает расходящиеся прямые a и b в точках A и B. Длина отрезка AB будет наименьшей,

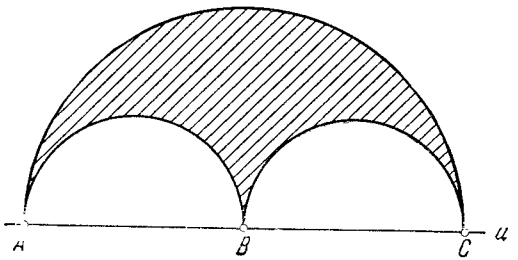

Рис. 43.

если c совпадает с общим перпендикуляром данных расходящихся прямых. По обе стороны от их общего перпендикуляра прямые a и b неограниченно расходятся.

3. Площадь треугольника ABC равна $r^2(\pi - \angle A - \angle B - \angle C)$, где величины углов взяты в радианной мере, а r — упомянутая в § 12 постоянная, общая для всех треугольников. Наибольшую площадь πr^2 будет иметь треугольник, все углы которого равны нулю (на рис. 43 такой треугольник заштрихован).

4. Вписанный в окружность угол не всегда измеряется половиной дуги, на которую он опирается. В частности, на диаметр всегда опирается острый угол (а не прямой, как в евклидовой геометрии).

5. Если дано произвольное целое число $n > 6$, то можно построить такую окружность, что сторона правильного вписанного в нее n-угольника равна ее радиусу. Сторона вписанного в окружность правильного шестиугольника всегда больше ее радиуса.

6. В геометрии Лобачевского в некоторых случаях можно выполнить квадратуру круга, т. е. построить, пользуясь линейкой и циркулем, равновеликие круг и «квадрат» (точнее — равноугольный ромб, поскольку в гиперболической плоскости не существует четырехугольника с четырьмя прямыми углами). В евклидовой геометрии квадратура круга, как известно, невыполнима.

Рассмотренные нами примеры показывают, как велико подчас расхождение между выводами геометрий Евклида и Лобачевского.

* *
*

В нашей книжке намечены только первые вехи пути, ведущего к проникновению в глубины гиперболической геометрии. Мы будем рады, если читатель, ознакомившийся по нашему изложению с началами этой замечательной науки, заинтересуется ею и пожелает изучить специальные посвященные ей труды, в том числе творения ее основоположника Н. И. Лобачевского.